

Workshop de Estudantes do Programa de Verão em Matemática do
ICMC-USP 2026
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
11 de Fevereiro de 2026

INTRODUÇÃO À DINÂMICA SIMBÓLICA

Raphael Modesto Malvão¹

Orientador(a): Miguel Adriano Koiller Schnoor²

Coorientador(a): Alessandro Gaio Chimenton³

¹Universidade Federal Fluminense (UFF), rmodesto@id.uff.br

²Universidade Federal Fluminense (UFF), mschnoor@id.uff.br

³Universidade Federal Fluminense (UFF), alessandrogaio@id.uff.br

Neste trabalho são introduzidas algumas noções básicas de sistemas dinâmicos usando o *shift* como exemplo e objeto de estudo. Seja Σ_2 o conjunto de todas as sequências de dois símbolos, ou seja, $\Sigma_2 = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \dots\}$. O shift é a função $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dada por $\sigma(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Exploraremos algumas propriedades da dinâmica dada pela iteração do shift em Σ_2 .

Dinâmicas simbólicas de dois (como acima) ou mais símbolos são ricas em propriedades interessantes e servem como modelos para dinâmicas mais gerais. Sob certas condições é possível mostrar que importantes sistemas dinâmicos são, em algum sentido, equivalentes a uma determinada dinâmica simbólica.

Definimos em Σ_2 uma métrica com a qual o shift é Lipschitz-contínuo. Provamos que a dinâmica do shift em Σ_2 é *transitiva* e tem o conjunto dos *pontos periódicos* denso. Mais precisamente, um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ é transitivo se alguma de suas *órbitas*

$$\mathcal{O}^+(p) = \{p, f(p), (f \circ f)(p), (f \circ f \circ f)(p) \dots\} = \{f^n(p) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

for densa em X , enquanto um ponto $p \in X$ é periódico de período k se este é o menor natural tal que $f^k(p) = p$. O objetivo futuro do trabalho é estudar os fundamentos da conjugação e semiconjugação do shift com dinâmicas importantes, como a expansora de grau 2 no círculo.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas Dinâmicos; Dinâmica Simbólica; Transitividade.

REFERÊNCIAS

- [1] Ochoa, Alejandro. Symbolic Dynamics *Lecture Notes*, MIT OpenCourseWare 2005.
- [2] Anatole Katok, Boris Hasselblatt. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. *Cambridge University Press*, Revised ed. 2010.
- [3] Michael Brin, Garrett Stuck. Introduction to Dynamical Systems. *Cambridge University Press*, 2015.
- [4] Richard A. Holmgren. A First Course in Discrete Dynamical Systems. *Springer*, 2nd, p. 87-118, 1996.
- [5] Robert L. Devaney. An introduction to chaotic dynamical systems. *Perseus Books*, v.2, p. 39-43, 2003.
- [6] L. Backes, A. T. Baraviera e F. M. Branco, *Uma introdução aos sistemas dinâmicos via exemplos*, IMPA, 2023.