

Teoria de Hodge Discreta e Sistemas de Classificação

Lucas dos Santos

Orientador(a): Marcos Calçada

Coorientador(a): José Tadeu Lunardi

Universidade Estadual de Ponta Grossa

sbnlucas96@gmail.com

Palavras-chave: Topologia Algébrica Discreta; HodgeRank; Complexos Simpliciais; Decomposição de Hodge; Sistemas de Ranqueamento; Representações Sociais.

1 Resumo

A elaboração de sistemas de classificação global a partir de dados coletados de múltiplos agentes enfrenta obstáculos estruturais significativos, como a incompletude das informações e a presença de inconsistências lógicas, exemplificadas pelo Paradoxo de Condorcet, na qual preferências coletivas agregadas podem formar ciclos intransitivos ($A > B$, $B > C$, mas $C > A$). Para solucionar essa problemática, este trabalho propõe a aplicação da Teoria de Hodge Discreta através do método HodgeRank, que modela dados de comparação par-a-par em estruturas de complexos simpliciais. Diferente das abordagens estatísticas tradicionais, esta ferramenta permite não apenas extrair um ranking otimizado, mas também decompor e quantificar a natureza das inconsistências nos dados através de um certificado de confiabilidade.

A fundamentação matemática inicia-se com a representação dos itens como 0-simplexos (vértices). Esses objetos, juntamente com 1-simplexos (arestas) e 2-simplexos (faces triangulares), geram espaços vetoriais de p -cadeias C_p , sobre os quais se definem os espaços duais de p -cocadeias C^p . Uma 0-cocadeia funciona como uma função potencial que associa um *score* a cada vértice, enquanto uma 1-cocadeia define um fluxo de arestas alternado $X_{ij} = -X_{ji}$, capturando a intensidade da preferência agregada entre pares. A relação entre esses espaços é estabelecida pelos operadores de co-borda $\delta_k : C^k \rightarrow C^{k+1}$, análogos discretos do cálculo vetorial clássico: o gradiente combinatório δ_0 mapeia potenciais em diferenças de valor nas arestas, e o rotacional ou curl* δ_1 mede a acumulação de fluxo ao redor de triângulos, identificando quebras locais de transitividade.

O cerne desta abordagem reside no Teorema de Decomposição de Hodge, fundamentado na propriedade de que o co-bordo de um co-bordo é nulo (i.e., $\delta_{k+1} \circ \delta_k = 0$). O teorema estabelece que o espaço das 1-cocadeias admite uma decomposição ortogonal única: $C^1 = \text{im}(\delta_0) \oplus \ker(\Delta_1) \oplus \text{im}(\delta_1^*)$. O fluxo gradiente $\text{im}(\delta_0)$ representa a componente perfeitamente consistente, da qual se extrai o ranking global através de um problema de mínimos quadrados. O fluxo rotacional $\text{im}(\delta_1^*)$ isola as inconsistências puramente locais. Já o fluxo harmônico

$\ker(\Delta_1)$ revela inconsistências globais associadas a ciclos longos que não podem ser resolvidos localmente, frequentemente vinculados a buracos na estrutura de dados quantificados pelos números de Betti β_1 .

A interpretação desta ferramenta para a aplicação prática permite discernir se as divergências no grupo resultam de ruídos pontuais ou de uma desestruturação global do consenso. No campo da Teoria das Representações Sociais, o HodgeRank identifica o núcleo central estável e mapeia instabilidades que funcionam como drivers dinâmicos para mudanças de opinião, como observado em estudos sobre o COVID-19. Além da psicologia social, o método demonstra versatilidade em áreas como redes cerebrais, algoritmos de busca, fluxos de tráfego e redes de trocas comerciais, transformando dados ruidosos em mapas estruturais que revelam a hierarquia e a robustez das relações em sistemas complexos.

Referências

- [1] OLIVEIRA, Luna R. N. et al. **HodgeRank as a new tool to explore the structure of a social representation**. *Frontiers in Physics*, v. 12, art. 1333727, 2024. DOI: 10.3389/fphy.2024.1333727 [9-11].
- [2] LIM, Lek-Heng. **Hodge Laplacians on Graphs**. *SIAM Review*, v. 62, n. 3, p. 685–715, 2020. DOI: 10.1137/18M1223101 [4, 5].
- [3] MASCAREÑAS PAZOS, Alicia. **Teoría de Hodge discreta y sistemas de clasificación**. 2022. 47 f. Trabajo Fin de Grao (Grao de Matemáticas) – Facultad de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Julho 2022 [1-3].
- [4] VIANA, Marcelo Barbosa. **Complexos simpliciais finitos e o teorema de Euler**. 2018. 49 f. Dissertação (Mestrado em Ciências - Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo (IME-USP), São Paulo, 2018 [6-8].