Teoria de pontos críticos para funcionais não suaves e aplicações em problemas elípticos não-lineares

Quarta Aula: Um problema sub-linear

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Programa de Verão em Matemática 2023

ICMC/USP

São Carlos-SP

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.
Por uma **solução** do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.
Por uma **solução** do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

entendemos como sendo uma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\sigma}(\Omega)$,

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.
Por uma **solução** do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

entendemos como sendo uma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\sigma}(\Omega)$, para algum $\sigma > 1$,

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.
Por uma **solução** do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

entendemos como sendo uma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\sigma}(\Omega)$, para algum $\sigma > 1$, verificando:

$$-\Delta u \in [\underline{f}(x, u(x)), \overline{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.
Por uma **solução** do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

entendemos como sendo uma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\sigma}(\Omega)$, para algum $\sigma > 1$, verificando:

$$-\Delta u \in [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Quando

$$-\Delta u(x) = f(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

Definição de Solução

No que segue assuma Ω um subconjunto aberto limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.
Por uma **solução** do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

entendemos como sendo uma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\sigma}(\Omega)$, para algum $\sigma > 1$, verificando:

$$-\Delta u \in [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Quando

$$-\Delta u(x) = f(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

diremos que u é **solução forte.**

Problema Sublinear

Assuma $a > 0$,

Problema Sublinear

Assuma $a > 0$, $p, q \in (0, 1)$

Problema Sublinear

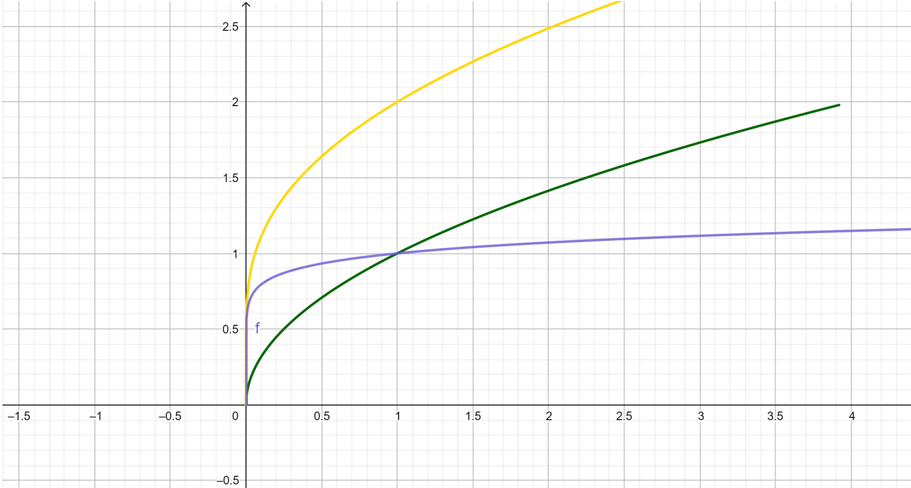
Assuma $a > 0$, $p, q \in (0, 1)$ e

$$f(x, u(x)) = \chi_{\{u \geq a\}}(x) u^q + |u|^{p-1} u, \;\; x \in \Omega.$$

Problema Sublinear

Assuma $a > 0$, $p, q \in (0,1)$ e

$$f(x,u(x)) = \chi_{\{u \geq a\}}(x)u^q + |u|^{p-1}u, \ x \in \Omega.$$



Neste caso, podemos considerar o seguinte problema elíptico sublinear:

$$(P_a)\begin{cases} -\Delta u = \chi_{\{u \geq a\}}(x)u^q + |u|^{p-1}u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso, podemos considerar o seguinte problema elíptico sublinear:

$$(P_a)\begin{cases} -\Delta u = \chi_{\{u \geq a\}}(x)u^q + |u|^{p-1}u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Afim de encontrarmos uma solução forte para o problema acima, utilizaremos métodos variacionais, isto é, mostraremos que pontos críticos do funcional Euler Lagrange associado ao problema (P_a) são soluções fortes de (P_a).

Neste sentido, observe que o funcional $I_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

Neste sentido, observe que o funcional $I_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_a(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx - \int_\Omega F_a(u) \, dx,$$

Neste sentido, observe que o funcional $I_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_a(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \int_\Omega F_a(u)\,dx,$$

onde $F_a(t) = \displaystyle\int_0^t \chi_{\{s\geq a\}} s^q\,ds$,

Neste sentido, observe que o funcional $I_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_a(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \int_\Omega F_a(u)\,dx,$$

onde $F_a(t) = \displaystyle\int_0^t \chi_{\{s\geq a\}} s^q\,ds$, define o funcional Euler Lagrange associado ao problema (P_a).

Neste sentido, observe que o funcional $I_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_a(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \int_\Omega F_a(u)\,dx,$$

onde $F_a(t) = \displaystyle\int_0^t \chi_{\{s\geq a\}} s^q\,ds$, define o funcional Euler Lagrange associado ao problema (P_a).

Note que

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \leq a \\ \end{cases}$$

Neste sentido, observe que o funcional $I_a : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$I_a(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx - \int_\Omega F_a(u) \, dx,$$

onde $F_a(t) = \displaystyle\int_0^t \chi_{\{s \geq a\}} s^q \, ds$, define o funcional Euler Lagrange associado ao problema (P_a).

Note que

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \leq a \\ \frac{t^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}, \; t \geq a. \end{cases}$$

Além disso, um vez que

$$f_a(x,u) = \chi_{\{u \geq a\}} u^q \text{ possui crescimento sub-crítico}$$

Além disso, um vez que

$$f_a(x,u) = \chi_{\{u \geq a\}} u^q \text{ possui crescimento sub-crítico}$$

isto é

$$|f_a(x,u)| \leq (1 + |u|^q), x \in \Omega,$$

Além disso, um vez que

$$f_a(x,u) = \chi_{\{u \geq a\}} u^q \text{ possui crescimento sub-crítico}$$

isto é

$$|f_a(x,u)| \leq (1 + |u|^q), x \in \Omega,$$

com $q < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$,

Além disso, um vez que

$$f_a(x,u) = \chi_{\{u \geq a\}} u^q \text{ possui crescimento sub-crítico}$$

isto é

$$|f_a(x,u)| \leq (1 + |u|^q), x \in \Omega,$$

com $q < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, para $N \geq 3$,

Além disso, um vez que

$$f_a(x,u) = \chi_{\{u \geq a\}} u^q \text{ possui crescimento sub-crítico}$$

isto é

$$|f_a(x,u)| \leq (1 + |u|^q), x \in \Omega,$$

com $q < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, para $N \geq 3$, obtemos que o funcional $\Psi_a : H_0^1(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$

Além disso, um vez que

$$f_a(x,u) = \chi_{\{u \geq a\}} u^q \text{ possui crescimento sub-crítico}$$

isto é

$$|f_a(x,u)| \leq (1 + |u|^q), x \in \Omega,$$

com $q < 2^* - 1 = \frac{N+2}{N-2}$, para $N \geq 3$, obtemos que o funcional $\Psi_a : H_0^1(\Omega) \subset L^{q+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\Psi_a(u) = \int_\Omega F_a(u)\, dx$$

é localmente Lipschitz.

Por outro lado, se considerarmos

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx$$

Por outro lado, se considerarmos

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \text{ e } Q(u) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx,$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$,

Por outro lado, se considerarmos

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \text{ e } Q(u) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx,$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que J e Q são funcionais de classe C^1,

Por outro lado, se considerarmos

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \text{ e } Q(u) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx,$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que J e Q são funcionais de classe C^1, com

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx$$

Por outro lado, se considerarmos

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \text{ e } Q(u) = \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx,$$

para $u \in H_0^1(\Omega)$, temos que J e Q são funcionais de classe C^1, com

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx \text{ e } Q'(u)v = \int_\Omega |u|^{p-1}uv\,dx,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Por estes fatos, podemos concluir que

$$\partial I_a(u) = \{J'(u)\} - \{Q'(u)\} - \partial \Psi_a(u), \; u \in H_0^1(\Omega),$$

Por estes fatos, podemos concluir que

$$\partial I_a(u) = \{J'(u)\} - \{Q'(u)\} - \partial\Psi_a(u), \ u \in H_0^1(\Omega),$$

com

$$\partial\Psi_a(u) \subset [\underline{f}_a(x,u), \overline{f}_a(x,u)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por estes fatos, podemos concluir que

$$\partial I_a(u) = \{J'(u)\} - \{Q'(u)\} - \partial\Psi_a(u), \ u \in H_0^1(\Omega),$$

com

$$\partial\Psi_a(u) \subset [\underline{f}_a(x,u), \overline{f}_a(x,u)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Neste caso, dado $\rho \in \partial\Psi_a(u)$,

Por estes fatos, podemos concluir que

$$\partial I_a(u) = \{J'(u)\} - \{Q'(u)\} - \partial\Psi_a(u),\ u \in H_0^1(\Omega),$$

com

$$\partial\Psi_a(u) \subset [\underline{f}_a(x,u), \overline{f}_a(x,u)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Neste caso, dado $\rho \in \partial\Psi_a(u)$, vai existir $z(x,u) \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$

Por estes fatos, podemos concluir que

$$\partial I_a(u) = \{J'(u)\} - \{Q'(u)\} - \partial\Psi_a(u),\ u \in H_0^1(\Omega),$$

com

$$\partial\Psi_a(u) \subset [\underline{f}_a(x,u), \overline{f}_a(x,u)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Neste caso, dado $\rho \in \partial\Psi_a(u)$, vai existir $z(x,u) \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que

$$\langle \rho, v\rangle = \int_\Omega z(x,u)v\,dx$$

Por estes fatos, podemos concluir que

$$\partial I_a(u) = \{J'(u)\} - \{Q'(u)\} - \partial\Psi_a(u),\ u \in H_0^1(\Omega),$$

com

$$\partial\Psi_a(u) \subset [\underline{f}_a(x,u), \overline{f}_a(x,u)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Neste caso, dado $\rho \in \partial\Psi_a(u)$, vai existir $z(x,u) \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que

$$\langle \rho, v \rangle = \int_\Omega z(x,u)v\,dx$$

e

$$z(x,u) \in [\underline{f}_a(x,u), \overline{f}_a(x,u)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Tendo em vista que

$$\underline{f}_a(x, u) = u^q \chi_{[u>a]}(x)$$

Tendo em vista que

$$\underline{f}_a(x,u) = u^q \chi_{[u>a]}(x) \text{ e } \overline{f}_a(x,u) = u^q \chi_{[u \geq a]}(x),$$

Tendo em vista que

$$\underline{f}_a(x,u) = u^q \chi_{[u>a]}(x) \text{ e } \overline{f}_a(x,u) = u^q \chi_{[u\geq a]}(x),$$

podemos concluir que

$$0 \leq z(x,u) \leq |u|^q \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1}$$

Lema 1

O funcional I_a possui um ponto crítico, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I_a(u)$.

Lema 1

O funcional I_a possui um ponto crítico, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I_a(u)$.

Demonstração: Para provarmos este resultado, é suficiente mostrar:

- I_a é limitado inferiormente

Lema 1

O funcional I_a possui um ponto crítico, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I_a(u)$.

Demonstração: Para provarmos este resultado, é suficiente mostrar:

- I_a é limitado inferiormente e
- I_a verifica a condição (PS).

Lema 1

O funcional I_a possui um ponto crítico, isto é, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $0 \in \partial I_a(u)$.

Demonstração: Para provarmos este resultado, é suficiente mostrar:

- I_a é limitado inferiormente e
- I_a verifica a condição (PS).

De fato, pois via Teorema de Minimização

$$c_a := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I_a(u)$$

é um valor crítico.

(i) I_a é limitado inferiormente.

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$

$$I_a(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \left(\int_{[u\leq a]} F_a(u)\,dx + \int_{[u>a]} F_a(u)\,dx\right)$$

(i) I_a é limitado inferiormente.

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
I_a(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \left(\int_{[u \le a]} F_a(u)\,dx + \int_{[u>a]} F_a(u)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \int_{[u>a]} \left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

(i) I_a é limitado inferiormente.

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
I_a(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \left(\int_{[u \leq a]} F_a(u)\,dx + \int_{[u > a]} F_a(u)\,dx \right) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \int_{[u > a]} \left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1} \right) dx.
\end{aligned}
$$

Segue da imersão contínua entre $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$

(i) I_a é limitado inferiormente.

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} I_a(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \left(\int_{[u \le a]} F_a(u)\,dx + \int_{[u>a]} F_a(u)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \int_{[u>a]} \left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\right)\,dx. \end{aligned}$$

Segue da imersão contínua entre $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ que

$$I_a(u) \;\ge\; \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u\|^{p+1} - \int_{[u>a]} \frac{u^{q+1}}{q+1}\,dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}|\{u > a\}|$$

(i) I_a é limitado inferiormente.

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} I_a(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \left(\int_{[u\leq a]} F_a(u)\,dx + \int_{[u>a]} F_a(u)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \int_{[u>a]} \left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\right) dx. \end{aligned}$$

Segue da imersão contínua entre $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} I_a(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u\|^{p+1} - \int_{[u>a]} \frac{u^{q+1}}{q+1}\,dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}|\{u>a\}| \\ (2) \qquad &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u\|^{q+1}, \end{aligned}$$

(i) I_a é limitado inferiormente.

Com efeito, dado $u \in H_0^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
I_a(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \left(\int_{[u\leq a]} F_a(u)\,dx + \int_{[u>a]} F_a(u)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} - \int_{[u>a]} \left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\right)\,dx.
\end{aligned}
$$

Segue da imersão contínua entre $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ que

$$
\begin{aligned}
I_a(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u\|^{p+1} - \int_{[u>a]} \frac{u^{q+1}}{q+1}\,dx + \frac{a^{q+1}}{q+1}|\{u > a\}| \\
(2) \qquad &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u\|^{q+1},
\end{aligned}
$$

mostrando que I_a é limitado inferiormente.

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que:

- $I_a(u_n) \to c$, $n \to \infty$;

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que:

- $I_a(u_n) \to c$, $n \to \infty$;
- $\|v_n\|_{H_0^{-1}(\Omega)} := \lambda_a(u_n) \to 0$, $n \to \infty$.

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que:

- $I_a(u_n) \to c$, $n \to \infty$;
- $\|v_n\|_{H_0^{-1}(\Omega)} := \lambda_a(u_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Verificaremos agora que $\{u_n\}$ converge forte em $H_0^1(\Omega)$ a menos de subsequência.

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que:

- $I_a(u_n) \to c$, $n \to \infty$;
- $\|v_n\|_{H_0^{-1}(\Omega)} := \lambda_a(u_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Verificaremos agora que $\{u_n\}$ converge forte em $H_0^1(\Omega)$ a menos de subsequência.

Uma vez que $v_n \in \partial I_a(u_n)$,

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que:

- $I_a(u_n) \to c$, $n \to \infty$;
- $\|v_n\|_{H_0^{-1}(\Omega)} := \lambda_a(u_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Verificaremos agora que $\{u_n\}$ converge forte em $H_0^1(\Omega)$ a menos de subsequência.

Uma vez que $v_n \in \partial I_a(u_n)$, podemos escrever

$$(3) \qquad \langle v_n, \varphi \rangle = J'(u_n)\varphi - Q'(u_n)\varphi - \int_\Omega w_n(x, u_n)\varphi \, dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

(ii) O funcional I_a verifica a condição (PS).

Neste caso, seja $\{u_n\}$ uma sequência de $H_0^1(\Omega)$ tal que:

- $I_a(u_n) \to c$, $n \to \infty$;
- $\|v_n\|_{H_0^{-1}(\Omega)} := \lambda_a(u_n) \to 0$, $n \to \infty$.

Verificaremos agora que $\{u_n\}$ converge forte em $H_0^1(\Omega)$ a menos de subsequência.

Uma vez que $v_n \in \partial I_a(u_n)$, podemos escrever

$$(3) \qquad \langle v_n, \varphi \rangle = J'(u_n)\varphi - Q'(u_n)\varphi - \int_\Omega w_n(x, u_n)\varphi \, dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

para algum $w_n(x, u_n) \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$.

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.
De fato, combinando (2) com o fato de $I_a(u_n)$ ser uma sequência limitada

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.
De fato, combinando (2) com o fato de $I_a(u_n)$ ser uma sequência limitada obtemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u_n\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq K$$

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.
De fato, combinando (2) com o fato de $I_a(u_n)$ ser uma sequência limitada obtemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u_n\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq K$$

para algum $K > 0$.

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.
De fato, combinando (2) com o fato de $I_a(u_n)$ ser uma sequência limitada obtemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u_n\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq K$$

para algum $K > 0$. Concluindo assim a limitação de $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$.

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.
De fato, combinando (2) com o fato de $I_a(u_n)$ ser uma sequência limitada obtemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u_n\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq K$$

para algum $K > 0$. Concluindo assim a limitação de $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$.

Desta limitação, vai existir $u \in H_0^1(\Omega)$

Afirmamos que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$.
De fato, combinando (2) com o fato de $I_a(u_n)$ ser uma sequência limitada obtemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{C_1}{p+1}\|u_n\|^{p+1} - \frac{C_2}{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq K$$

para algum $K > 0$. Concluindo assim a limitação de $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$.

Desta limitação, vai existir $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

a menos de subsequência.

Desta convergência fraca, é possível concluir

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \; (n \to \infty).$$

Desta convergência fraca, é possível concluir

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \; (n \to \infty).$$

Em particular

$$(4) \qquad \int_\Omega \nabla u_n \nabla u \, dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx$$

Desta convergência fraca, é possível concluir

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi \, dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \ (n \to \infty).$$

Em particular

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u \, dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 \ (n \to \infty). \tag{4}$$

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ combinado com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \ (n \to \infty),$$

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ combinado com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \ (n \to \infty),$$

para todo $\varphi \in L^{p+1}(\Omega)$,

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ combinado com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \ (n \to \infty),$$

para todo $\varphi \in L^{p+1}(\Omega)$, isto é

$$|u_n|^{p-1} u_n \rightharpoonup |u|^{p-1} u \text{ fraco-* em } L^{p+1}(\Omega)^*$$

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ combinado com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \ (n \to \infty),$$

para todo $\varphi \in L^{p+1}(\Omega)$, isto é

$$|u_n|^{p-1} u_n \rightharpoonup |u|^{p-1} u \text{ fraco-* em } L^{p+1}(\Omega)^* = L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ combinado com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \ (n \to \infty),$$

para todo $\varphi \in L^{p+1}(\Omega)$, isto é

$$|u_n|^{p-1} u_n \rightharpoonup |u|^{p-1} u \text{ fraco-* em } L^{p+1}(\Omega)^* = L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

E como $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$

Além disso, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{p+1}(\Omega)$ combinado com o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n \varphi \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-1} u \varphi \, dx \ (n \to \infty),$$

para todo $\varphi \in L^{p+1}(\Omega)$, isto é

$$|u_n|^{p-1} u_n \rightharpoonup |u|^{p-1} u \text{ fraco-* em } L^{p+1}(\Omega)^* = L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

E como $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$ obtemos:

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n (u_n - u) \, dx \to 0 \ (n \to \infty). \tag{5}$$

Agora, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$

Agora, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$ temos (a menos de subsequência)

$$u_n \to u \text{ em } L^{q+1}(\Omega).$$

Agora, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$ temos (a menos de subsequência)

$$u_n \to u \text{ em } L^{q+1}(\Omega).$$

Deste fato, é possível concluir que $\{w_n(x, u_n)\}$ é limitado em $L^{q+1}(\Omega)^*$

Agora, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$ temos (a menos de subsequência)

$$u_n \to u \text{ em } L^{q+1}(\Omega).$$

Deste fato, é possível concluir que $\{w_n(x, u_n)\}$ é limitado em $L^{q+1}(\Omega)^*$ e portanto

$$w_n(x, u_n) \rightharpoonup w(x, u) \text{ fraco-* em } L^{q+1}(\Omega)^* = L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega),$$

Agora, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$ temos (a menos de subsequência)

$$u_n \to u \text{ em } L^{q+1}(\Omega).$$

Deste fato, é possível concluir que $\{w_n(x, u_n)\}$ é limitado em $L^{q+1}(\Omega)^*$ e portanto

$$w_n(x, u_n) \rightharpoonup w(x, u) \text{ fraco-* em } L^{q+1}(\Omega)^* = L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega),$$

com $w(x, u) \in \partial\Psi_a(u)$.

Agora, usando a imersão compacta entre os espaços $H_0^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$ temos (a menos de subsequência)

$$u_n \to u \text{ em } L^{q+1}(\Omega).$$

Deste fato, é possível concluir que $\{w_n(x, u_n)\}$ é limitado em $L^{q+1}(\Omega)^*$ e portanto

$$w_n(x, u_n) \rightharpoonup w(x, u) \text{ fraco-* em } L^{q+1}(\Omega)^* = L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega),$$

com $w(x, u) \in \partial\Psi_a(u)$. Daí

$$\int_\Omega w_n(x, u_n)(u_n - u)\, dx \to 0 \ (n \to \infty). \tag{6}$$

Tomando $\varphi = (u_n - u)$ em (3)

Tomando $\varphi = (u_n - u)$ em (3) e passando ao limite de $n \to \infty$, é possível concluir com as convergências (5) e (6)

Tomando $\varphi = (u_n - u)$ em (3) e passando ao limite de $n \to \infty$, é possível concluir com as convergências (5) e (6)

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx \to 0 \ (n \to \infty). \tag{7}$$

Tomando $\varphi = (u_n - u)$ em (3) e passando ao limite de $n \to \infty$, é possível concluir com as convergências (5) e (6)

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx \to 0 \ (n \to \infty). \tag{7}$$

Deste fato, segue de (4)

$$\|u_n - u\|^2 = \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla u_n\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

Tomando $\varphi = (u_n - u)$ em (3) e passando ao limite de $n \to \infty$, é possível concluir com as convergências (5) e (6)

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx \to 0 \ (n \to \infty). \tag{7}$$

Deste fato, segue de (4)

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla u_n\, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &\to 0 \ (n \to \infty), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 2

Seja

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \text{ um ponto crítico minimizante do funcional } I_a,$$

obtido pelo Lema 1.

Lema 2

Seja

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \text{ um ponto crítico minimizante do funcional } I_a,$$

obtido pelo Lema 1. Então

$$u_a \text{ é uma solução (não trivial) forte para o problema } (P_a),$$

Lema 2

Seja

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \text{ um ponto crítico minimizante do funcional } I_a,$$

obtido pelo Lema 1. Então

$$u_a \text{ é uma solução (não trivial) forte para o problema } (P_a),$$

para todo $a > 0$.

Lema 2

Seja

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \text{ um ponto crítico minimizante do funcional } I_a,$$

obtido pelo Lema 1. Então

$$u_a \text{ é uma solução (não trivial) forte para o problema } (P_a),$$

para todo $a > 0$.

Demonstração: Sabendo que $0 \in \partial I_a(u_a)$,

Lema 2

Seja

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \text{ um ponto crítico minimizante do funcional } I_a,$$

obtido pelo Lema 1. Então

$$u_a \text{ é uma solução (não trivial) forte para o problema } (P_a),$$

para todo $a > 0$.

Demonstração: Sabendo que $0 \in \partial I_a(u_a)$, vai existir $w(x, u_a) \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$

Lema 2

Seja

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \text{ um ponto crítico minimizante do funcional } I_a,$$

obtido pelo Lema 1. Então

$$u_a \text{ é uma solução (não trivial) forte para o problema } (P_a),$$

para todo $a > 0$.

Demonstração: Sabendo que $0 \in \partial I_a(u_a)$, vai existir $w(x, u_a) \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que

$$0 = \int_\Omega \nabla u_a \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega |u_a|^{p-1} u_a \varphi \, dx - \int_\Omega w(x, u_a) \varphi \, dx,$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Daí, u_a é uma solução fraca do problema de Dirichlet,

Daí, u_a é uma solução fraca do problema de Dirichlet, isto é:

$$\begin{cases} -\Delta u_a = w(x, u_a) + |u_a|^{p-1} u_a \text{ em } \Omega, \\ u_a = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí, u_a é uma solução fraca do problema de Dirichlet, isto é:

$$\begin{cases} -\Delta u_a = w(x, u_a) + |u_a|^{p-1} u_a \text{ em } \Omega, \\ u_a = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso, fixando $r = \min\left\{\frac{2^*}{p}, \frac{q+1}{q}\right\}$,

Daí, u_a é uma solução fraca do problema de Dirichlet, isto é:

$$\begin{cases} -\Delta u_a = w(x, u_a) + |u_a|^{p-1} u_a \text{ em } \Omega, \\ u_a = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso, fixando $r = \min\left\{\frac{2^*}{p}, \frac{q+1}{q}\right\}$, podemos concluir através do Teorema de Agnom-Douglas Niremberg que

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega).$$

Daí, u_a é uma solução fraca do problema de Dirichlet, isto é:

$$\begin{cases} -\Delta u_a = w(x, u_a) + |u_a|^{p-1} u_a \text{ em } \Omega, \\ u_a = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso, fixando $r = \min\left\{\frac{2^*}{p}, \frac{q+1}{q}\right\}$, podemos concluir através do Teorema de Agnom-Douglas Niremberg que

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega).$$

Assim, é possível aplicar a fórmula de Green (versão fraca)

Daí, u_a é uma solução fraca do problema de Dirichlet, isto é:

$$\begin{cases} -\Delta u_a = w(x, u_a) + |u_a|^{p-1} u_a \text{ em } \Omega, \\ u_a = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso, fixando $r = \min\left\{\frac{2^*}{p}, \frac{q+1}{q}\right\}$, podemos concluir através do Teorema de Agnom-Douglas Niremberg que

$$u_a \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega).$$

Assim, é possível aplicar a fórmula de Green (versão fraca) para obter:

$$-\Delta u_a = w(x, u_a) + |u_a|^{p-1} u_a \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado,

$$w(x, u_a) \in [\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado,

$$w(x, u_a) \in [\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Destes fatos,

$$-\Delta u_a - |u_a|^{p-1} u_a \in [\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{8}$$

Por outro lado,

$$w(x, u_a) \in [\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Destes fatos,

$$-\Delta u_a - |u_a|^{p-1} u_a \in [\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{8}$$

mostrando que u_a é uma solução de (P_a).

Verificaremos agora que u_a é uma solução forte de (P_a).

Verificaremos agora que u_a é uma solução forte de (P_a).

Para isto, basta mostrarmos que

$$[u = a] = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = a\}$$

possui medida de Lebesgue nula.

Verificaremos agora que u_a é uma solução forte de (P_a).

Para isto, basta mostrarmos que

$$[u = a] = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = a\}$$

possui medida de Lebesgue nula.
Inicialmente, observe que

$$-\Delta u(x) = 0 \text{ q.t.p. em } [u = a].$$

Verificaremos agora que u_a é uma solução forte de (P_a).

Para isto, basta mostrarmos que

$$[u = a] = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = a\}$$

possui medida de Lebesgue nula.
Inicialmente, observe que

$$-\Delta u(x) = 0 \text{ q.t.p. em } [u = a].$$

Além disso,

$$[\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] = \begin{cases} \{0\}, \text{ se } u_a(x) < a; \\ \\ \end{cases}$$

Verificaremos agora que u_a é uma solução forte de (P_a).

Para isto, basta mostrarmos que

$$[u = a] = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = a\}$$

possui medida de Lebesgue nula.
Inicialmente, observe que

$$-\Delta u(x) = 0 \text{ q.t.p. em } [u = a].$$

Além disso,

$$[\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] = \begin{cases} \{0\}, \text{ se } u_a(x) < a; \\ [0, a^q], \text{ se } u_a(x) = a; \\ \end{cases}$$

Verificaremos agora que u_a é uma solução forte de (P_a).

Para isto, basta mostrarmos que

$$[u = a] = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = a\}$$

possui medida de Lebesgue nula.
Inicialmente, observe que

$$-\Delta u(x) = 0 \text{ q.t.p. em } [u = a].$$

Além disso,

$$[\underline{f}(x, u_a), \overline{f}(x, u_a)] = \begin{cases} \{0\}, \text{ se } u_a(x) < a; \\ [0, a^q], \text{ se } u_a(x) = a; \\ \{u_a(x)^q\}, \text{ se } u_a(x) > a. \end{cases}$$

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo.

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ ($\varphi \neq 0$),

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ ($\varphi \neq 0$), temos:

$$I_a(\varphi) = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \int_{[\varphi \geq a]} \left(\frac{\varphi^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1} \right) dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |\varphi|^{p+1}\, dx$$

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ ($\varphi \neq 0$), temos:

$$\begin{aligned} I_a(\varphi) &= \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \int_{[\varphi \geq a]} \left(\frac{\varphi^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1} \right) dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\varphi|^{p+1}\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\varphi|^{p+1}\, dx \end{aligned}$$

Usando estes fatos, segue de (8)

$$-|a|^{p-1}a \in [0, a^q] \text{ q.t.p. em } [u_a = a],$$

concluindo assim que $|[u_a = a]| = 0$.

Agora, para finalizarmos este lema, verificaremos que u_a é não nulo. Fixado $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ ($\varphi \neq 0$), temos:

$$\begin{aligned} I_a(\varphi) &= \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \int_{[\varphi \geq a]} \left(\frac{\varphi^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1} \right) dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\varphi|^{p+1}\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |\varphi|^{p+1}\, dx \\ &=: J(\varphi). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$J(t\varphi) = At^2 - Bt^{(p+1)} = t^{(p+1)}\left(At^{(1-p)} - B\right),\ \forall t \geq 0,$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 \text{ e } B = \frac{1}{p+1}|\varphi|_{p+1}^{(p+1)}.$$

Neste caso, tomando

$$t_0 = \left(\frac{B}{2A}\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

tem-se que

$$I_a(t_0\varphi) \leq -\frac{B}{2}t_0^{(p+1)} = -\frac{B}{2}\left(\frac{B}{2A}\right)^{\frac{p+1}{1-p}} =: c_* < 0,$$

para todo $a > 0$. Mostrando assim que $c_a < c_* < 0$,

Por outro lado,

$$J(t\varphi) = At^2 - Bt^{(p+1)} = t^{(p+1)}\left(At^{(1-p)} - B\right), \ \forall t \geq 0,$$

onde

$$A = \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 \text{ e } B = \frac{1}{p+1}|\varphi|_{p+1}^{(p+1)}.$$

Neste caso, tomando

$$t_0 = \left(\frac{B}{2A}\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

tem-se que

$$I_a(t_0\varphi) \leq -\frac{B}{2}t_0^{(p+1)} = -\frac{B}{2}\left(\frac{B}{2A}\right)^{\frac{p+1}{1-p}} =: c_* < 0,$$

para todo $a > 0$. Mostrando assim que $c_a < c_* < 0$, e consequentemente que u_a é **não trivial** para todo $a \in (0, a_*)$. ■

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!
- Qual a relação entre as fases $[u_a < a] \cap \Omega$ e $[u_a > a]$?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!
- Qual a relação entre as fases $[u_a < a] \cap \Omega$ e $[u_a > a]$?
- Qual a densidade de $[u_a < a]$ e $[u_a > a]$?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!
- Qual a relação entre as fases $[u_a < a] \cap \Omega$ e $[u_a > a]$?
- Qual a densidade de $[u_a < a]$ e $[u_a > a]$?
- As fronteiras livres $\partial[u_a < a] \cap \Omega$ e $\partial[u_a > a]$ possuem perímetro finito?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!
- Qual a relação entre as fases $[u_a < a] \cap \Omega$ e $[u_a > a]$?
- Qual a densidade de $[u_a < a]$ e $[u_a > a]$?
- As fronteiras livres $\partial[u_a < a] \cap \Omega$ e $\partial[u_a > a]$ possuem perímetro finito?
- É possível mostrar que $\partial[u_a < a]$ e $\partial[u_a > a]$ são superfícies suaves?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!
- Qual a relação entre as fases $[u_a < a] \cap \Omega$ e $[u_a > a]$?
- Qual a densidade de $[u_a < a]$ e $[u_a > a]$?
- As fronteiras livres $\partial[u_a < a] \cap \Omega$ e $\partial[u_a > a]$ possuem perímetro finito?
- É possível mostrar que $\partial[u_a < a]$ e $\partial[u_a > a]$ são superfícies suaves? Se sim, qual a melhor regularidade?

Perguntas em aberto

- $|[u_a > a]| > 0$? Para $a > 0$ suficientemente pequeno vimos que sim.
- $u_a \in C^{1,1}(\Omega)$? Regularidade ótima!
- Qual a relação entre as fases $[u_a < a] \cap \Omega$ e $[u_a > a]$?
- Qual a densidade de $[u_a < a]$ e $[u_a > a]$?
- As fronteiras livres $\partial[u_a < a] \cap \Omega$ e $\partial[u_a > a]$ possuem perímetro finito?
- É possível mostrar que $\partial[u_a < a]$ e $\partial[u_a > a]$ são superfícies suaves? Se sim, qual a melhor regularidade?