Teoria de pontos críticos para funcionais não suaves e aplicações em problemas elípticos não-lineares

Terceira Aula: Gradientes generalizados sobre os espaços de Lebesgue

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Programa de Verão em Matemática 2023

ICMC/USP

São Carlos-SP

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(., t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(., t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, .)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(.,t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x,.)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$ e

(iii) $|f(x,t)| \leq a + b|t|^p$ (crescimento subcrítico ou crítico),

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(., t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, .)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$ e

(iii) $|f(x,t)| \leq a + b|t|^p$ (crescimento subcrítico ou crítico), onde $a, b > 0$, $p \in (0, 2^* - 1]$, se $N \geq 3$

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(., t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, .)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$ e

(iii) $|f(x, t)| \leq a + b|t|^p$ (crescimento subcrítico ou crítico), onde $a, b > 0$, $p \in (0, 2^* - 1]$, se $N \geq 3$ e $p \in (0, \infty)$, se $N = 1, 2$.

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(., t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, .)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$ e

(iii) $|f(x,t)| \leq a + b|t|^p$ (crescimento subcrítico ou crítico), onde $a, b > 0$, $p \in (0, 2^* - 1]$, se $N \geq 3$ e $p \in (0, \infty)$, se $N = 1, 2$.

Neste caso, é possível provar que a função

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$$

é uma função de Carathéodory

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(., t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, .)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$ e

(iii) $|f(x, t)| \leq a + b|t|^p$ (crescimento subcrítico ou crítico), onde $a, b > 0$, $p \in (0, 2^* - 1]$, se $N \geq 3$ e $p \in (0, \infty)$, se $N = 1, 2$.

Neste caso, é possível provar que a função

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, s)\, ds$$

é uma função de Carathéodory e para cada $x \in \Omega$

$$F(x, .) \text{ é localmente Lipschitz em } \mathbb{R}.$$

Função de Carathéodory

No que segue, assuma que

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto limitado com fronteira suave e
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função

verificando:

(i) $f(.,t)$ mensurável para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x,.)$ localmente limitado para cada $x \in \Omega$ e

(iii) $|f(x,t)| \leq a + b|t|^p$ (crescimento subcrítico ou crítico), onde $a, b > 0$, $p \in (0, 2^* - 1]$, se $N \geq 3$ e $p \in (0, \infty)$, se $N = 1, 2$.

Neste caso, é possível provar que a função

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$$

é uma função de Carathéodory e para cada $x \in \Omega$

$$F(x,.) \text{ é localmente Lipschitz em } \mathbb{R}.$$

Lema 1

Seja $\Psi : L^{p+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional dado por

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x))\, dx.$$

Lema 1

Seja $\Psi : L^{p+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional dado por

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x))\, dx.$$

Então $\Psi \in Lip_{loc}(L^{p+1}(\Omega); \mathbb{R})$.

Ideia da demonstração: Basta utilizar o fato de $F(x, .)$ ser localmente Lipschitz, para cada $x \in \Omega$, o Teorema do Valor Médio e a Desigualdade de Holder.

Dados $\epsilon > 0$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$,

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\}$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\},$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \ : \ |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \ : \ |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_{\epsilon}(x,t)$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s)\ :\ |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s)\ :\ |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \; : \; |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \; : \; |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Mostraremos agora que

(1) $$F^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \end{cases}$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Mostraremos agora que

$$(1) \qquad F^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,t)v \text{ se } v < 0. \end{cases}$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \ : \ |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_{\epsilon}(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \ : \ |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_{\epsilon}(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_{\epsilon}(x,t).$$

Mostraremos agora que

(1) $$F^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,t)v \text{ se } v < 0. \end{cases}$$

Para isto, fixados $x \in \Omega$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Mostraremos agora que

$$(1) \qquad F^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,t)v \text{ se } v < 0. \end{cases}$$

Para isto, fixados $x \in \Omega$ e

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \ : \ |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \ : \ |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Mostraremos agora que

(1) $$F^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,t)v \text{ se } v < 0. \end{cases}$$

Para isto, fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Mostraremos agora que

$$(1) \qquad F^0((x,t);v) \le \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,t)v \text{ se } v < 0. \end{cases}$$

Para isto, fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$ observe que

$$F^0((x,t);v) \quad = \quad \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{F(x,t+h+\lambda v) - F(x,t+h)}{\lambda}$$

Dados $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, denote

$$\underline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess inf}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\} \text{ e}$$

$$\overline{f}_\epsilon(x,t) = \text{ ess sup}\{f(x,s) \,:\, |s-t| < \epsilon\},$$

bem como

$$\overline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \overline{f}_\epsilon(x,t) \text{ e}$$

$$\underline{f}(x,t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \underline{f}_\epsilon(x,t).$$

Mostraremos agora que

(1) $$F^0((x,t);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,t)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,t)v \text{ se } v < 0. \end{cases}$$

Para isto, fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$ observe que

$$\begin{aligned} F^0((x,t);v) &= \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{F(x,t+h+\lambda v) - F(x,t+h)}{\lambda} \\ &= \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} f(x,s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Neste caso, fixando $\epsilon > 0$

Neste caso, fixando $\epsilon > 0$ e $v > 0$

Neste caso, fixando $\epsilon > 0$ e $v > 0$

$$F^0((x,t);v) \quad \leq \quad \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\bar{f}_\epsilon(x,t)\left(\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} ds\right)$$

Neste caso, fixando $\epsilon > 0$ e $v > 0$

$$\begin{aligned} F^0((x,t);v) &\leq \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda} \bar{f}_\epsilon(x,t) \left(\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} ds \right) \\ &= \bar{f}_\epsilon(x,t) v. \end{aligned}$$

Neste caso, fixando $\epsilon > 0$ e $v > 0$

$$\begin{aligned} F^0((x,t);v) &\leq \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda}\bar{f}_\epsilon(x,t)\left(\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} ds\right) \\ &= \bar{f}_\epsilon(x,t)v. \end{aligned}$$

Passando ao limite de $\epsilon \to 0^+$ obtemos:

$$F^0((x,t);v) \leq \bar{f}(x,t)v.$$

Agora, se $v < 0$

Agora, se $v < 0$ temos:

$$
\begin{aligned}
F^0((x,t);v) &= \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \left(-\frac{1}{\lambda} \int_{t+h+\lambda v}^{t+h} f(x,s)\, ds \right) \\
&\leq \underline{f}_{\epsilon}(x,t) v.
\end{aligned}
$$

Agora, se $v < 0$ temos:

$$\begin{aligned} F^0((x,t);v) &= \limsup_{h\to 0, \lambda\downarrow 0} \left(-\frac{1}{\lambda} \int_{t+h+\lambda v}^{t+h} f(x,s)\, ds \right) \\ &\leq \underline{f}_{\epsilon}(x,t)v. \end{aligned}$$

Passando ao limite de $\epsilon \to 0^+$

Agora, se $v < 0$ temos:

$$\begin{aligned} F^0((x,t);v) &= \limsup_{h \to 0, \lambda \downarrow 0} \left(-\frac{1}{\lambda} \int_{t+h+\lambda v}^{t+h} f(x,s)\, ds \right) \\ &\leq \underline{f}_\epsilon(x,t)v. \end{aligned}$$

Passando ao limite de $\epsilon \to 0^+$

$$F^0((x,t);v) \leq \underline{f}(x,t)v,$$

como queriamos demonstrar. ■

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$,

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$f(x, t+0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t+h)$$

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$f(x, t+0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t+h) \text{ e } f(x, t-0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t-h)$$

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$f(x, t{+}0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t{+}h) \text{ e } f(x, t{-}0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t{-}h)$$

Se

$$f(x, .) \text{ é uma função descontínua do tipo salto,}$$

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$f(x,t+0) = \lim_{h \to 0^+} f(x,t+h) \text{ e } f(x,t-0) = \lim_{h \to 0^+} f(x,t-h)$$

Se

$$f(x,.) \text{ é uma função descontínua do tipo salto,}$$

com seu conjunto de pontos de descontinuidade não contendo ponto de acumulação,

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$f(x, t+0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t+h) \text{ e } f(x, t-0) = \lim_{h \to 0^+} f(x, t-h)$$

Se

$$f(x, .) \text{ é uma função descontínua do tipo salto,}$$

com seu conjunto de pontos de descontinuidade não contendo ponto de acumulação, então

$$\underline{f}(x, t) = \min\{f(x, t+0), f(x, t-0)\}$$

Lema 2

Fixados $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, defina

$$f(x,t+0) = \lim_{h\to 0^+} f(x,t+h) \text{ e } f(x,t-0) = \lim_{h\to 0^+} f(x,t-h)$$

Se

$$f(x,.) \text{ é uma função descontínua do tipo salto,}$$

com seu conjunto de pontos de descontinuidade não contendo ponto de acumulação, então

$$\underline{f}(x,t) = \min\{f(x,t+0), f(x,t-0)\}$$

e

$$\overline{f}(x,t) = \max\{f(x,t+0), f(x,t-0))\}.$$

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2.

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$.

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$. Sendo

$f(x,.)$ uma função descontínua do tipo salto,

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$. Sendo

$f(x,.)$ uma função descontínua do tipo salto,

temos que os limites laterais de $f(x,.)$ existem,

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$. Sendo

$$f(x,.) \text{ uma função descontínua do tipo salto,}$$

temos que os limites laterais de $f(x,.)$ existem, e portanto:

$$F^0((x,t);v) \geq \begin{cases} f(x,t-0)v \\ \end{cases} \quad (2)$$

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$. Sendo

$$f(x,.) \text{ uma função descontínua do tipo salto,}$$

temos que os limites laterais de $f(x,.)$ existem, e portanto:

$$F^0((x,t);v) \geq \begin{cases} f(x,t-0)v \\ f(x,t+0)v, \end{cases} \tag{2}$$

para todo $t, v \in \mathbb{R}$.

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$. Sendo

$$f(x,.) \text{ uma função descontínua do tipo salto,}$$

temos que os limites laterais de $f(x,.)$ existem, e portanto:

$$F^0((x,t);v) \geq \begin{cases} f(x,t-0)v \\ f(x,t+0)v, \end{cases} \tag{2}$$

para todo $t, v \in \mathbb{R}$. Logo,

$$f(x,t-0), f(x,t+0) \in \partial_t F(x,t),$$

Lema 3

Assuma que $f(x,t)$ verifica as hipóteses do Lema 2. Então

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)],$$

para todo $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Fixe $x \in \Omega$. Sendo

$$f(x,.) \text{ uma função descontínua do tipo salto,}$$

temos que os limites laterais de $f(x,.)$ existem, e portanto:

$$(2) \qquad F^0((x,t);v) \geq \begin{cases} f(x,t-0)v \\ f(x,t+0)v, \end{cases}$$

para todo $t, v \in \mathbb{R}$. Logo,

$$f(x,t-0), f(x,t+0) \in \partial_t F(x,t),$$

consequentemente

$$(3) \qquad \underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t) \in \partial_t F(x,t).$$

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Com efeito, dado $\xi \in \partial_t F(x,t)$

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Com efeito, dado $\xi \in \partial_t F(x,t)$ temos (por (1))

$$\xi . v \leq F^0((x,u); v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,u)v, \text{ se } v > 0; \\ \end{cases}$$

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Com efeito, dado $\xi \in \partial_t F(x,t)$ temos (por (1))

$$\xi.v \leq F^0((x,u);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,u)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,u)v, \text{ se } v < 0, \end{cases}$$

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Com efeito, dado $\xi \in \partial_t F(x,t)$ temos (por (1))

$$\xi.v \leq F^0((x,u);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,u)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,u)v, \text{ se } v < 0, \end{cases}$$

implicando que

$$\underline{f}(x,u) \leq \xi \leq \overline{f}(x,u).$$

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Com efeito, dado $\xi \in \partial_t F(x,t)$ temos (por (1))

$$\xi . v \leq F^0((x,u);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,u)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,u)v, \text{ se } v < 0, \end{cases}$$

implicando que

$$\underline{f}(x,u) \leq \xi \leq \overline{f}(x,u).$$

Por fim, usando (3), (4) e o fato de $\partial_t F(x,t)$ ser um conjunto convexo na reta,

Agora, afirmamos que

$$\partial_t F(x,t) \subset [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)]. \tag{4}$$

Com efeito, dado $\xi \in \partial_t F(x,t)$ temos (por (1))

$$\xi . v \leq F^0((x,u);v) \leq \begin{cases} \overline{f}(x,u)v, \text{ se } v > 0; \\ \underline{f}(x,u)v, \text{ se } v < 0, \end{cases}$$

implicando que

$$\underline{f}(x,u) \leq \xi \leq \overline{f}(x,u).$$

Por fim, usando (3), (4) e o fato de $\partial_t F(x,t)$ ser um conjunto convexo na reta, obtemos que

$$\partial_t F(x,t) = [\underline{f}(x,t), \overline{f}(x,t)].\blacksquare$$

Antes de enuciarmos o próximo resultado precisaremos da seguinte definição:

Definição

Diremos que

$\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função **superposicionalmente mensurável**

Antes de enuciarmos o próximo resultado precisaremos da seguinte definição:

Definição

Diremos que

$\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função **superposicionalmente mensurável**

se para toda função vetorial mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$,

Antes de enuciarmos o próximo resultado precisaremos da seguinte definição:

Definição

Diremos que

$\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função **superposicionalmente mensurável**

se para toda função vetorial mensurável $u : \Omega \to \mathbb{R}^k$, a composição

$$\varphi(x, u(x)) \text{ é uma função mensurável.}$$

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i) - (iii)$;

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i) - (iii)$;
- $\underline{f}, \overline{f}$ são superposicionalmente mensurável.

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i) - (iii)$;
- $\underline{f}, \overline{f}$ são superposicionalmente mensurável.

Então, Ψ é um funcional localmente Lipschitz em $L^{p+1}(\Omega)$

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i) - (iii)$;
- $\underline{f}, \overline{f}$ são superposicionalmente mensurável.

Então, Ψ é um funcional localmente Lipschitz em $L^{p+1}(\Omega)$ e

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \overline{f}(x, u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i)-(iii)$;
- $\underline{f}, \overline{f}$ são superposicionalmente mensurável.

Então, Ψ é um funcional localmente Lipschitz em $L^{p+1}(\Omega)$ e

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \overline{f}(x, u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, assumindo $X = H^1(\Omega)$

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i) - (iii)$;
- $\underline{f}, \overline{f}$ são superposicionalmente mensurável.

Então, Ψ é um funcional localmente Lipschitz em $L^{p+1}(\Omega)$ e

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \overline{f}(x, u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, assumindo $X = H^1(\Omega)$ (ou $X = H_0^1(\Omega)$)

Gradientes Generalizados sobre espaços de Lebesgue

Teorema 1

Suponha que

- $f(x,t)$ verifique as condições $(i)-(iii)$;
- $\underline{f}, \overline{f}$ são superposicionalmente mensurável.

Então, Ψ é um funcional localmente Lipschitz em $L^{p+1}(\Omega)$ e

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x,u(x)) = [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, assumindo $X = H^1(\Omega)$ (ou $X = H_0^1(\Omega)$) temos:

$$\partial\Psi|_X(u) = \partial\Psi(u), \; u \in X.$$

Obs. : A inclusão dada no Teorema 1 é uma Representação de Riesz,

Obs. : A inclusão dada no Teorema 1 é uma Representação de Riesz, e significa que para cada

$$\xi \in \partial\Psi(u) \subset L^{p+1}(\Omega)^*,$$

Obs. : A inclusão dada no Teorema 1 é uma Representação de Riesz, e significa que para cada

$$\xi \in \partial\Psi(u) \subset L^{p+1}(\Omega)^*,$$

existe (via Teorema da Representação de Riesz) uma função

$$\xi(., u) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

Obs. : A inclusão dada no Teorema 1 é uma Representação de Riesz, e significa que para cada

$$\xi \in \partial\Psi(u) \subset L^{p+1}(\Omega)^*,$$

existe (via Teorema da Representação de Riesz) uma função

$$\xi(., u) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

tal que

$$\langle \xi, v \rangle = \int_\Omega \xi(x, u) v \, dx, \; \forall v \in L^{p+1}(\Omega),$$

Obs. : A inclusão dada no Teorema 1 é uma Representação de Riesz, e significa que para cada

$$\xi \in \partial\Psi(u) \subset L^{p+1}(\Omega)^*,$$

existe (via Teorema da Representação de Riesz) uma função

$$\xi(.,u) \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

tal que

$$\langle \xi, v \rangle = \int_\Omega \xi(x,u) v \, dx, \ \forall v \in L^{p+1}(\Omega),$$

com

$$\xi(x,u) \in [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))], \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e
- $\lambda_j \to 0^+$ na reta.

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e
- $\lambda_j \to 0^+$ na reta.

Assim, a menos de subsequência

$$h_j(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e
- $\lambda_j \to 0^+$ na reta.

Assim, a menos de subsequência

$$h_j(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e para alguma função $g \in L^{p+1}(\Omega)$

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e
- $\lambda_j \to 0^+$ na reta.

Assim, a menos de subsequência

$$h_j(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e para alguma função $g \in L^{p+1}(\Omega)$

(5) $$|h_j(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,\ j \in \mathbb{N}.$$

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e
- $\lambda_j \to 0^+$ na reta.

Assim, a menos de subsequência

$$h_j(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e para alguma função $g \in L^{p+1}(\Omega)$

$$|h_j(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,\ j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Agora, dados $u, v \in L^{p+1}(\Omega)$

Demonstração do Teorema 1: Considere

- $h_j \to 0$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e
- $\lambda_j \to 0^+$ na reta.

Assim, a menos de subsequência

$$h_j(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e para alguma função $g \in L^{p+1}(\Omega)$

$$|h_j(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,\ j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Agora, dados $u, v \in L^{p+1}(\Omega)$ assuma que

$$\Psi^0(u; v) = \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(\int_\Omega F(x, u + h_j + \lambda_j v) - F(x, u + h_j)\, dx \right).$$

Agora, definindo

- $\theta_j := \max\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$

Agora, definindo

- $\theta_j := \max\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$ e
- $\eta_j = \min\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$

Agora, definindo

- $\theta_j := \max\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$ e
- $\eta_j = \min\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$

temos por (*iii*)

$$\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) \quad - \quad F(x, u + h_j)) \leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j}^{\theta_j} |f(x, s)|\, ds$$

Agora, definindo

- $\theta_j := \max\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$ e
- $\eta_j = \min\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$

temos por (*iii*)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) &- F(x, u + h_j)) \leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j}^{\theta_j} |f(x, s)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j}^{\theta_j} (a + b|s|^p)\, ds
\end{aligned}$$

Agora, definindo

- $\theta_j := \max\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$ e
- $\eta_j = \min\{u + h_j + \lambda_j v, u + h_j\}$

temos por (*iii*)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) &- F(x, u + h_j)) \leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j}^{\theta_j} |f(x,s)|\, ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda_j}\int_{\eta_j}^{\theta_j} (a + b|s|^p)\, ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda_j}\left(a|\lambda_j v| + b(\frac{1}{p+1}|\eta_j|^{p+1} - \frac{1}{p+1}|\theta_j|^{p+1})\right)
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5),

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) \quad - \quad F(x, u + h_j))$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) &- F(x, u + h_j)) \\ &\leq a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u + h_j + \lambda_j v| + |u + h_j|)^p |\lambda_j v|\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) &- F(x, u + h_j)) \\
&\leq a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u + h_j + \lambda_j v| + |u + h_j|)^p |\lambda_j v| \\
&\leq a|v| + c_1 |u|^p |v| + c_2 |g|^p |v| + c_3 |v|^{p+1}
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}(F(x, u + h_j + \lambda_j v) &- F(x, u + h_j)) \\
&\leq a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u + h_j + \lambda_j v| + |u + h_j|)^p |\lambda_j v| \\
&\leq a|v| + c_1|u|^p|v| + c_2|g|^p|v| + c_3|v|^{p+1} \\
&\in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω.

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_j}(F(x,u+h_j+\lambda_j v) &- F(x,u+h_j)) \\ &\leq a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u+h_j+\lambda_j v| + |u+h_j|)^p|\lambda_j v| \\ &\leq a|v| + c_1|u|^p|v| + c_2|g|^p|v| + c_3|v|^{p+1} \\ &\in L^1(\Omega)\end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω. Neste caso, como a função do lado direito pertence a $L^1(\Omega)$ segue pelo Lema de Fatou

$$\Psi^0(u;v) \leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda_j}\left(F(x,u+h_j+\lambda_j v) - F(x,u+h_j)\right)\, dx$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_j}(F(x,u+h_j+\lambda_j v) &- F(x,u+h_j))\\ &\leq a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u+h_j+\lambda_j v| + |u+h_j|)^p|\lambda_j v|\\ &\leq a|v| + c_1|u|^p|v| + c_2|g|^p|v| + c_3|v|^{p+1}\\ &\in L^1(\Omega)\end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω. Neste caso, como a função do lado direito pertence a $L^1(\Omega)$ segue pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned}\Psi^0(u;v) &\leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda_j}\left(F(x,u+h_j+\lambda_j v) - F(x,u+h_j)\right)\, dx\\ &\leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty} F^0((x,u);v)\, dx\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio e a desigualdade (5), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_j}(F(x,u+h_j+\lambda_j v) &- F(x,u+h_j)) \\
&\leq a|v| + \frac{b}{\lambda_j}(|u+h_j+\lambda_j v| + |u+h_j|)^p|\lambda_j v| \\
&\leq a|v| + c_1|u|^p|v| + c_2|g|^p|v| + c_3|v|^{p+1} \\
&\in L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

em quase todo ponto de Ω. Neste caso, como a função do lado direito pertence a $L^1(\Omega)$ segue pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\Psi^0(u;v) &\leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda_j}\left(F(x,u+h_j+\lambda_j v) - F(x,u+h_j)\right)\, dx \\
&\leq \int_\Omega \limsup_{j\to\infty} F^0((x,u);v)\, dx \\
&= \int_\Omega \max\{w(x)v(x) \,:\, w(x) \in \partial_t F(x,u(x))\}\, dx.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3

$$\Psi^0(u; v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x, u(x)) v(x)\, dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x, u(x)) v(x)\, dx. \tag{6}$$

Usando o Lema 3

$$(6) \qquad \Psi^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u(x))v(x)\,dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x,u(x))v(x)\,dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x,u(x)) \leq \eta(x,u(x)) \leq \overline{f}(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando o Lema 3

$$(6) \qquad \Psi^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u(x))v(x)\,dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x,u(x))v(x)\,dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x,u(x)) \leq \eta(x,u(x)) \leq \overline{f}(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam

- $\xi \in \partial\Psi(u)$

Usando o Lema 3

$$(6) \qquad \Psi^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u(x))v(x)\,dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x,u(x))v(x)\,dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x,u(x)) \leq \eta(x,u(x)) \leq \overline{f}(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam

- $\xi \in \partial\Psi(u)$ e
- um conjunto $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$

Usando o Lema 3

$$(6) \qquad \Psi^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u(x))v(x)\,dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x,u(x))v(x)\,dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x,u(x)) \leq \eta(x,u(x)) \leq \overline{f}(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam

- $\xi \in \partial\Psi(u)$ e
- um conjunto $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$

verificando:

$$\xi(x,u(x)) < \underline{f}(x,u(x)), \; x \in M.$$

Usando o Lema 3

$$(6) \qquad \Psi^0(u; v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x, u(x))v(x)\,dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x, u(x))v(x)\,dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x, u(x)) \leq \eta(x, u(x)) \leq \overline{f}(x, u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam

- $\xi \in \partial\Psi(u)$ e
- um conjunto $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$

verificando:

$$\xi(x, u(x)) < \underline{f}(x, u(x)), \ x \in M.$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

Usando o Lema 3

$$(6) \qquad \Psi^0(u;v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u(x))v(x)\,dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x,u(x))v(x)\,dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x,u(x)) \leq \eta(x,u(x)) \leq \overline{f}(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam

- $\xi \in \partial\Psi(u)$ e
- um conjunto $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$

verificando:

$$\xi(x,u(x)) < \underline{f}(x,u(x)), \; x \in M.$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$-\int_\Omega \xi(x,u(x))\,dx = \int_\Omega \xi(x,u(x))(-\chi_M)\,dx$$

Usando o Lema 3

$$\text{(6)} \qquad \Psi^0(u; v) \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x, u(x))v(x)\, dx + \int_{[v\geq 0]} \overline{f}(x, u(x))v(x)\, dx.$$

Afirmação: Para todo $\eta \in \partial\Psi(u)$

$$\underline{f}(x, u(x)) \leq \eta(x, u(x)) \leq \overline{f}(x, u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam

- $\xi \in \partial\Psi(u)$ e
- um conjunto $M \subset \Omega$ com $|M| > 0$

verificando:

$$\xi(x, u(x)) < \underline{f}(x, u(x)), \ x \in M.$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$-\int_\Omega \xi(x, u(x))\, dx = \int_\Omega \xi(x, u(x))(-\chi_M)\, dx \leq \Psi^0(u; -\chi_M).$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$-\int_M \xi(x, u(x))\, dx \;=\; \int_\Omega \xi(x, u(x))(-\chi_M)\, dx$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\int_M \xi(x, u(x))\, dx &= \int_\Omega \xi(x, u(x))(-\chi_M)\, dx \\ &\leq \Psi^0(u; -\chi_M) \end{aligned}$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
-\int_M \xi(x, u(x))\, dx &= \int_\Omega \xi(x, u(x))(-\chi_M)\, dx \\
&\leq \Psi^0(u; -\chi_M) \\
&\leq -\int_\Omega \underline{f}(x, u(x))\chi_M\, dx
\end{aligned}$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
-\int_M \xi(x, u(x))\, dx &= \int_\Omega \xi(x, u(x))(-\chi_M)\, dx \\
&\leq \Psi^0(u; -\chi_M) \\
&\leq -\int_\Omega \underline{f}(x, u(x))\chi_M\, dx \\
&= -\int_M \underline{f}(x, u(x))\, dx,
\end{aligned}$$

Neste caso, tomando $v = -\chi_M \in L^{p+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\int_M \xi(x, u(x))\, dx &= \int_\Omega \xi(x, u(x))(-\chi_M)\, dx \\ &\leq \Psi^0(u; -\chi_M) \\ &\leq -\int_\Omega \underline{f}(x, u(x))\chi_M\, dx \\ &= -\int_M \underline{f}(x, u(x))\, dx, \end{aligned}$$

ou seja

$$\int_M \xi(x, u(x))\, dx \geq \int_M \underline{f}(x, u(x))\, dx,$$

uma contradição.

Analogamente, mostra-se que

$$\xi(x, u(x)) \leq \overline{f}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Analogamente, mostra-se que

$$\xi(x, u(x)) \leq \bar{f}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Destes fatos, fica provado que

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \bar{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\xi(x, u(x)) \leq \bar{f}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Destes fatos, fica provado que

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \bar{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Finalmente, para mostrar que

$$\partial\Psi|_X(u) \subset \partial\Psi(u),$$

para todo $u \in X$,

Analogamente, mostra-se que

$$\xi(x, u(x)) \leq \bar{f}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Destes fatos, fica provado que

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \bar{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Finalmente, para mostrar que

$$\partial\Psi|_X(u) \subset \partial\Psi(u),$$

para todo $u \in X$, basta verificar que

$$X \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \text{ continuamente}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\xi(x, u(x)) \leq \bar{f}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Destes fatos, fica provado que

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \bar{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Finalmente, para mostrar que

$$\partial\Psi|_X(u) \subset \partial\Psi(u),$$

para todo $u \in X$, basta verificar que

$$X \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \text{ continuamente e } \overline{X}^{|\cdot|_{p+1}} = L^{p+1}(\Omega),$$

Analogamente, mostra-se que

$$\xi(x, u(x)) \leq \bar{f}(x, u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Destes fatos, fica provado que

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x, u(x)) = [\underline{f}(x, u(x)), \bar{f}(x, u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Finalmente, para mostrar que

$$\partial\Psi|_X(u) \subset \partial\Psi(u),$$

para todo $u \in X$, basta verificar que

$$X \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \text{ continuamente e } \overline{X}^{|\cdot|_{p+1}} = L^{p+1}(\Omega),$$

para em seguida aplicar o Teorema da Regra da Cadeia.■

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Diremos que

I satisfaz a condição de **Palais Smale no nível c, $(PS)_c$,**

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Diremos que

I satisfaz a condição de **Palais Smale no nível** c**,** $(PS)_c$**,**

se para toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que:

- $I(u_n) \to c \ (n \to \infty)$;

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Diremos que

I satisfaz a condição de **Palais Smale no nível** c**,** $(PS)_c$**,**

se para toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que:

- $I(u_n) \to c \ (n \to \infty)$;
- $\lambda_I(u_n) \to 0 \ (n \to \infty)$,

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Diremos que

I satisfaz a condição de **Palais Smale no nível** c**,** $(PS)_c$**,**

se para toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que:

- $I(u_n) \to c$ $(n \to \infty)$;
- $\lambda_I(u_n) \to 0$ $(n \to \infty)$,

existir uma subsequência de $\{u_j\}$ que converge forte em X.

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Diremos que

I satisfaz a condição de **Palais Smale no nível c, $(PS)_c$,**

se para toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que:

- $I(u_n) \to c$ $(n \to \infty)$;
- $\lambda_I(u_n) \to 0$ $(n \to \infty)$,

existir uma subsequência de $\{u_j\}$ que converge forte em X.

Quando o funcional verificar a condição $(PS)_c$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$,

Existência de Pontos Críticos

Definição

Sejam

- $c \in \mathbb{R}$ e
- $I : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz.

Diremos que

I satisfaz a condição de **Palais Smale no nível c, $(PS)_c$,**

se para toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que:

- $I(u_n) \to c \ (n \to \infty)$;
- $\lambda_I(u_n) \to 0 \ (n \to \infty)$,

existir uma subsequência de $\{u_j\}$ que converge forte em X.

Quando o funcional verificar a condição $(PS)_c$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, diremos que

I verifica a condição (PS).

Lema da Deformação

Assuma que

- $A_c = \{x \in X \,:\, f(x) \leq c\}$

Lema da Deformação

Assuma que

- $A_c = \{x \in X \,:\, f(x) \leq c\}$ e
- $K_c = \{x \in X \,:\, 0 \in \partial f(x),\, f(x) = c\}$.

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS).

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno)

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno) existem

- $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$;

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno) existem

- $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$;
- um homeomorfismo $\eta : X \to X$

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno) existem

- $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$;
- um homeomorfismo $\eta : X \to X$

tais que

- $\eta(x) = x$, $x \notin A_{c+\epsilon_0} \setminus A_{c-\epsilon_0}$;

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno) existem

- $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$;
- um homeomorfismo $\eta : X \to X$

tais que

- $\eta(x) = x$, $x \notin A_{c+\epsilon_0} \setminus A_{c-\epsilon_0}$;
- $\eta(A_{c+\epsilon} \setminus N) \subset A_{c-\epsilon}$;

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno) existem

- $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$;
- um homeomorfismo $\eta : X \to X$

tais que

- $\eta(x) = x,\ x \notin A_{c+\epsilon_0} \setminus A_{c-\epsilon_0}$;
- $\eta(A_{c+\epsilon} \setminus N) \subset A_{c-\epsilon}$;
- Se $K_c = \emptyset$,

Lema da Deformação

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

satisfazendo a condição (PS). Se

- $c \in \mathbb{R}$;
- N é uma vizinhança aberta que contém K_c,

então dado $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeno) existem

- $\epsilon_0 \in (0, \epsilon)$;
- um homeomorfismo $\eta : X \to X$

tais que

- $\eta(x) = x$, $x \notin A_{c+\epsilon_0} \setminus A_{c-\epsilon_0}$;
- $\eta(A_{c+\epsilon} \setminus N) \subset A_{c-\epsilon}$;
- Se $K_c = \emptyset$, então $\eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}$.

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS).

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS). Assuma que

- $I(0) = 0$;

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS). Assuma que

- $I(0) = 0$;
- exitem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS). Assuma que

- $I(0) = 0$;
- exitem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
- existe $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS). Assuma que

- $I(0) = 0$;
- exitem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
- existe $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então o funcional I possui um valor critíco $c_I \geq \alpha$,

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS). Assuma que

- $I(0) = 0$;
- exitem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
- existe $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então o funcional I possui um valor critíco $c_I \geq \alpha$, com

$$c_I = \inf_{g \in \Gamma} \max\{I(u) \,:\, u \in g([0,1])\},$$

Teorema 2 (Teorema do Passo da Montanha)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS). Assuma que

- $I(0) = 0$;
- exitem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;
- existe $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então o funcional I possui um valor critíco $c_I \geq \alpha$, com

$$c_I = \inf_{g \in \Gamma} \max\{I(u) \ : \ u \in g([0,1])\},$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1]; X) \ : \ g(0) = 0 \text{ e } g(1) = e\}.$$

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS)

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente.

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Demonstração: Para provarmos que m_I é um valor crítico de I,

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Demonstração: Para provarmos que m_I é um valor crítico de I, devemos mostrar que $K_{m_I} \neq \emptyset$.

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Demonstração: Para provarmos que m_I é um valor crítico de I, devemos mostrar que $K_{m_I} \neq \emptyset$.

Se $K_{m_I} = \emptyset$,

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Demonstração: Para provarmos que m_I é um valor crítico de I, devemos mostrar que $K_{m_I} \neq \emptyset$.

Se $K_{m_I} = \emptyset$, segue do Lema da Deformação que existem

- $\epsilon > 0$

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Demonstração: Para provarmos que m_I é um valor crítico de I, devemos mostrar que $K_{m_I} \neq \emptyset$.

Se $K_{m_I} = \emptyset$, segue do Lema da Deformação que existem

- $\epsilon > 0$ e
- um campo $\eta : X \to X$

Teorema 3 (Teorema de Minimização)

Seja

$$I : X \to \mathbb{R} \text{ um funcional localmente Lipschitz}$$

verificando a condição (PS) e limitado inferiormente. Então, o nível

$$m_I = \inf_{u \in X} I(u)$$

é um valor crítico para I.

Demonstração: Para provarmos que m_I é um valor crítico de I, devemos mostrar que $K_{m_I} \neq \emptyset$.

Se $K_{m_I} = \emptyset$, segue do Lema da Deformação que existem

- $\epsilon > 0$ e
- um campo $\eta : X \to X$

tais que

$$\eta(A_{m_I+\epsilon}) \subset A_{m_I-\epsilon}.$$

Neste caso, vai existir

$$w = \eta(v),$$

Neste caso, vai existir

$$w = \eta(v), \text{ com } v \in A_{m_l+\epsilon},$$

Neste caso, vai existir

$$w = \eta(v), \text{ com } v \in A_{m_I+\epsilon},$$

com

$$I(w) \leq m_I - \epsilon$$

Neste caso, vai existir

$$w = \eta(v), \text{ com } v \in A_{m_l+\epsilon},$$

com

$$I(w) \leq m_l - \epsilon < m_l,$$

uma contradição. ■