Teoria dos pontos críticos para funcionais não suaves e aplicações em problemas elípticos não-lineares

Segunda aula: Propriedades do Gradiente Generalizado

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Programa de Verão em Matemática 2023
ICMC/USP

São Carlos-SP

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v\rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w\rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v\rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w\rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Vemos que ξ_x é um funcional linear.

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v\rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w\rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Vemos que ξ_x é um funcional linear. Por um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.1 mostra-se que

$$\langle \xi_x, w\rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in \langle v\rangle.$$

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \; : \; \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v\rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w\rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Vemos que ξ_x é um funcional linear. Por um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.1 mostra-se que

$$\langle \xi_x, w\rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in \langle v\rangle.$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banach e de (A_1),

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v\rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w\rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Vemos que ξ_x é um funcional linear. Por um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.1 mostra-se que

$$\langle \xi_x, w\rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in \langle v\rangle.$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banach e de (A_1),que existe um funcional linear ξ_x^* definido em X tal que

$$(1) \qquad \langle \xi_x^*, w\rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in X,$$

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v\rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v\rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w\rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Vemos que ξ_x é um funcional linear. Por um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.1 mostra-se que

$$\langle \xi_x, w\rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in \langle v\rangle.$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banach e de (A_1),que existe um funcional linear ξ_x^* definido em X tal que

(1) $$\langle \xi_x^*, w\rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in X,$$

e

$$\langle \xi_x^*, w\rangle = tf^0(x, w), \quad w \in \langle v\rangle,$$

Lema 1.2

Dados $x, v \in X$, tem-se

$$f^0(x; v) = \max\{\langle \xi, v \rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: De fato, dados $x, v \in X$ defina o funcional $\xi_x : \langle v \rangle \to \mathbb{R}$ por

$$\langle \xi_x, w \rangle = tf^0(x; v), \quad w = tv.$$

Vemos que ξ_x é um funcional linear. Por um raciocínio análogo ao usado na demonstração do Lema 1.1 mostra-se que

$$\langle \xi_x, w \rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in \langle v \rangle.$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banach e de (A_1),que existe um funcional linear ξ_x^* definido em X tal que

(1) $$\langle \xi_x^*, w \rangle \leq f^0(x; w), \quad w \in X,$$

e

$$\langle \xi_x^*, w \rangle = tf^0(x, w), \quad w \in \langle v \rangle,$$

implicando que

(2) $$\langle \xi_x^*, v \rangle = f^0(x, v).$$

implicando que

(2) $$\langle \xi_x^*, v \rangle = f^0(x, v).$$

De (A_3) e (1)

$$\langle \xi_x^*, w \rangle \leq K(x)||w||, \quad w \in X,$$

implicando que

$$\langle \xi_x^*, v \rangle = f^0(x, v). \tag{2}$$

De (A_3) e (1)

$$\langle \xi_x^*, w \rangle \leq K(x)||w||, \quad w \in X,$$

mostrando que ξ_x^* é um funcional linear contínuo, isto é, $\xi_x^* \in X^*$.

implicando que

$$(2) \qquad \langle \xi_x^*, v \rangle = f^0(x, v).$$

De (A_3) e (1)

$$\langle \xi_x^*, w \rangle \leq K(x)||w||, \quad w \in X,$$

mostrando que ξ_x^* é um funcional linear contínuo, isto é, $\xi_x^* \in X^*$. Sendo assim, segue de (1) que

$$\xi_x^* \in \partial f(x).$$

implicando que

$$(2) \qquad \langle \xi_x^*, v\rangle = f^0(x, v).$$

De (A_3) e (1)

$$\langle \xi_x^*, w\rangle \leq K(x)||w||, \quad w \in X,$$

mostrando que ξ_x^* é um funcional linear contínuo, isto é, $\xi_x^* \in X^*$. Sendo assim, segue de (1) que

$$\xi_x^* \in \partial f(x).$$

De (2)

$$\langle \xi_x^*, v\rangle \geq \langle \xi, v\rangle, \quad \xi \in \partial f(x).$$

implicando que

$$(2) \qquad \langle \xi_x^*, v \rangle = f^0(x, v).$$

De (A_3) e (1)

$$\langle \xi_x^*, w \rangle \leq K(x)||w||, \quad w \in X,$$

mostrando que ξ_x^* é um funcional linear contínuo, isto é, $\xi_x^* \in X^*$. Sendo assim, segue de (1) que

$$\xi_x^* \in \partial f(x).$$

De (2)

$$\langle \xi_x^*, v \rangle \geq \langle \xi, v \rangle, \quad \xi \in \partial f(x).$$

Logo $\langle \xi_x^*, v \rangle$ é uma cota superior do conjunto

$$\{\langle \xi, v \rangle \;\; : \;\; \xi \in \partial f(x)\},$$

e uma vez que

$$\langle \xi_x^*, v \rangle \in \{\langle \xi, v \rangle \quad : \quad \xi \in \partial f(x)\},$$

pois ξ_x^* satisfaz a desigualdade (1), e uma vez que

$$\langle \xi_x^*, v \rangle \in \{\langle \xi, v \rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

pois ξ_x^* satisfaz a desigualdade (1), podemos concluir que

$$f^0(x; v) = \langle \xi_x^*, v \rangle = \max\{\langle \xi, v \rangle \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

demonstrando o lema. ■

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$,

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C,\cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C,\xi) = \sup\{\langle \xi, x\rangle \; : \; x \in C\}.$$

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C, \cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x\rangle \ : \ x \in C\}.$$

De acordo com a Definição acima, para cada $\Sigma \subset X^*$

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C, \cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x \rangle \ : \ x \in C\}.$$

De acordo com a Definição acima, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, \cdot) : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi \rangle \ : \ \xi \in \Sigma\}.$$

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C, \cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x\rangle \ : \ x \in C\}.$$

De acordo com a Definição acima, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, \cdot) : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi\rangle \ : \ \xi \in \Sigma\}.$$

Nesta definição, é comum utilizar X ao em vez de X^{**}, pois sendo X **reflexivo** a aplicação canônica J é sobrejetora, isto é $J(X) = X^{**}$.

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C, \cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x \rangle \ : \ x \in C\}.$$

De acordo com a Definição acima, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, \cdot) : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi \rangle \ : \ \xi \in \Sigma\}.$$

Nesta definição, é comum utilizar X ao em vez de X^{**}, pois sendo X **reflexivo** a aplicação canônica J é sobrejetora, isto é $J(X) = X^{**}$. Portanto, para cada $\varphi \in X^{**}$ existe um único $x \in X$

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C, \cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x \rangle \; : \; x \in C\}.$$

De acordo com a Definição acima, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, \cdot) : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi \rangle \; : \; \xi \in \Sigma\}.$$

Nesta definição, é comum utilizar X ao em vez de X^{**}, pois sendo X **reflexivo** a aplicação canônica J é sobrejetora, isto é $J(X) = X^{**}$. Portanto, para cada $\varphi \in X^{**}$ existe um único $x \in X$ tal que

$$\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \xi, x \rangle.$$

Definição

Definimos como **função suporte** de um subconjunto não-vazio $C \subset X$, a seguinte função $\sigma(C, \cdot) : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\sigma(C, \xi) = \sup\{\langle \xi, x\rangle \ : \ x \in C\}.$$

De acordo com a Definição acima, para cada $\Sigma \subset X^*$ a função suporte $\sigma(\Sigma, \cdot) : X^{**} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dada por

$$\sigma(\Sigma, \varphi) = \sup\{\langle \varphi, \xi\rangle \ : \ \xi \in \Sigma\}.$$

Nesta definição, é comum utilizar X ao em vez de X^{**}, pois sendo X **reflexivo** a aplicação canônica J é sobrejetora, isto é $J(X) = X^{**}$. Portanto, para cada $\varphi \in X^{**}$ existe um único $x \in X$ tal que

$$\langle \varphi, \xi\rangle = \langle \xi, x\rangle.$$

Por isso, podemos denotar

$$\sigma(\Sigma, x) = \sup\{\langle \xi, x\rangle \ : \ \xi \in \Sigma\}.$$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$,

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

(S_2) Sejam

$$B \subset X$$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

(S_2) Sejam

$$B \subset X \text{ e } B^* \subset X^* \text{ bolas unitárias de centro } 0.$$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

(S_2) Sejam

$$B \subset X \text{ e } B^* \subset X^* \text{ bolas unitárias de centro } 0.$$

Então, dados $\xi \in X^*$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

(S_2) Sejam

$$B \subset X \text{ e } B^* \subset X^* \text{ bolas unitárias de centro } 0.$$

Então, dados $\xi \in X^*$ e $v \in X$,

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

(S_2) Sejam

$$B \subset X \text{ e } B^* \subset X^* \text{ bolas unitárias de centro 0.}$$

Então, dados $\xi \in X^*$ e $v \in X$, tem-se

$$\sigma(B, \xi) = \|\xi\|_{X^*}$$

Enunciaremos agora algumas propriedades a respeito das funções suportes, definidas anteriormente. Sejam

$$C, D, C_1, C_2 \subset X \text{ e } \Sigma, \Delta, \Sigma_1, \Sigma_2 \subset X^*.$$

(S_1) Se $C = \{x_0\} \subset X$, então

$$\sigma(\{x_0\}, \xi) = \langle \xi, x_0 \rangle, \quad \xi \in X^*.$$

(S_2) Sejam

$$B \subset X \text{ e } B^* \subset X^* \text{ bolas unitárias de centro } 0.$$

Então, dados $\xi \in X^*$ e $v \in X$, tem-se

$$\sigma(B, \xi) = \|\xi\|_{X^*} \text{ e } \sigma(B^*, v) = \|v\|.$$

(S_3) Sejam

- C, D subconjuntos de X não-vazio, fechados e convexos,

(S_3) Sejam

- C, D subconjuntos de X não-vazio, fechados e convexos, e
- $\Sigma, \Delta \subset X^*$ subconjuntos não-vazio, fechados fraco-$\star$ e convexos.

(S_3) Sejam

- C, D subconjuntos de X não-vazio, fechados e convexos, e
- $\Sigma, \Delta \subset X^*$ subconjuntos não-vazio, fechados fraco-$\star$ e convexos.

Então,

$$C \subset D$$

(S_3) Sejam

- C, D subconjuntos de X não-vazio, fechados e convexos, e
- $\Sigma, \Delta \subset X^*$ subconjuntos não-vazio, fechados fraco-$\star$ e convexos.

Então,

$$C \subset D \Leftrightarrow \sigma(C,\xi) \leq \sigma(D,\xi), \quad \xi \in X^*,$$

(S_3) Sejam

- C, D subconjuntos de X não-vazio, fechados e convexos, e
- $\Sigma, \Delta \subset X^*$ subconjuntos não-vazio, fechados fraco-$\star$ e convexos.

Então,

$$C \subset D \Leftrightarrow \sigma(C,\xi) \leq \sigma(D,\xi), \quad \xi \in X^*,$$

e

$$\Sigma \subset \Delta$$

(S_3) Sejam

- C, D subconjuntos de X não-vazio, fechados e convexos, e
- $\Sigma, \Delta \subset X^*$ subconjuntos não-vazio, fechados fraco-$\star$ e convexos.

Então,

$$C \subset D \Leftrightarrow \sigma(C, \xi) \leq \sigma(D, \xi), \quad \xi \in X^*,$$

e

$$\Sigma \subset \Delta \Leftrightarrow \sigma(\Sigma, v) \leq \sigma(\Delta, v), \quad v \in X.$$

(S_4) O conjunto

$$\Sigma \text{ é limitado e compacto na topologia fraca-}\star$$

(S_4) O conjunto

$$\Sigma \text{ é limitado e compacto na topologia fraca-}\star$$

se, e somente se, a função suporte

$$\sigma(\Sigma, \cdot) \text{ for finita sobre } X.$$

(S_5) Dados $\xi \in X^*$ e $w \in X$,

(S_4) O conjunto

$$\Sigma \text{ é limitado e compacto na topologia fraca-}\star$$

se, e somente se, a função suporte

$$\sigma(\Sigma, \cdot) \text{ for finita sobre } X.$$

(S_5) Dados $\xi \in X^*$ e $w \in X$, tem-se:

- $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$;

(S_4) O conjunto

$$\Sigma \text{ é limitado e compacto na topologia fraca-}\star$$

se, e somente se, a função suporte

$$\sigma(\Sigma, \cdot) \text{ for finita sobre } X.$$

(S_5) Dados $\xi \in X^*$ e $w \in X$, tem-se:

- $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$;
- $\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w)$;

(S_4) O conjunto

$$\Sigma \text{ é limitado e compacto na topologia fraca-}\star$$

se, e somente se, a função suporte

$$\sigma(\Sigma, \cdot) \text{ for finita sobre } X.$$

(S_5) Dados $\xi \in X^*$ e $w \in X$, tem-se:

- $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$;
- $\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w)$;
- $\sigma(\lambda C, \xi) = \lambda\sigma(C, \xi)$, $\lambda > 0$;

(S_4) O conjunto

$$\Sigma \text{ é limitado e compacto na topologia fraca-}\star$$

se, e somente se, a função suporte

$$\sigma(\Sigma, \cdot) \text{ for finita sobre } X.$$

(S_5) Dados $\xi \in X^*$ e $w \in X$, tem-se:

- $\sigma(C_1 + C_2, \xi) = \sigma(C_1, \xi) + \sigma(C_2, \xi)$;
- $\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2, w) = \sigma(\Sigma_1, w) + \sigma(\Sigma_2, w)$;
- $\sigma(\lambda C, \xi) = \lambda\sigma(C, \xi)$, $\lambda > 0$;
- $\sigma(\lambda\Sigma, w) = \lambda\sigma(\Sigma, w)$, $\lambda > 0$;

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$$\partial f(x) \subset X^* \text{ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-}\star.$$

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$$\partial f(x) \subset X^* \text{ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-}\star.$$

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$,

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$,

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v \rangle, \langle \xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v \rangle, \langle \xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

daí, para cada $t \in (0, 1)$,

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v\rangle, \langle \xi_2, v\rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

daí, para cada $t \in (0, 1)$, segue que

$$t\langle \xi_1, v\rangle + (1-t)\langle \xi_2, v\rangle \leq tf^0(x; v) + (1-t)f^0(x; v),$$

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v \rangle, \langle \xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

daí, para cada $t \in (0, 1)$, segue que

$$t\langle \xi_1, v \rangle + (1-t)\langle \xi_2, v \rangle \leq tf^0(x; v) + (1-t)f^0(x; v),$$

implicando que

$$\langle t\xi_1 + (1-t)\xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v \rangle, \langle \xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

daí, para cada $t \in (0, 1)$, segue que

$$t\langle \xi_1, v \rangle + (1 - t)\langle \xi_2, v \rangle \leq tf^0(x; v) + (1 - t)f^0(x; v),$$

implicando que

$$\langle t\xi_1 + (1 - t)\xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

Portanto, $t\xi_1 + (1 - t)\xi_2 \in \partial f(x)$ para todo $t \in (0, 1)$

As próximas propriedades estão ligadas ao Gradiente Generalizado.

(P_1) Para todo $x \in X$ o conjunto

$\partial f(x) \subset X^*$ é convexo, limitado e compacto na topologia fraca-$\star$.

Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$, temos

$$||\xi||_{X^*} \leq K(x).$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$, temos

$$\langle \xi_1, v \rangle, \langle \xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

daí, para cada $t \in (0, 1)$, segue que

$$t\langle \xi_1, v \rangle + (1-t)\langle \xi_2, v \rangle \leq tf^0(x; v) + (1-t)f^0(x; v),$$

implicando que

$$\langle t\xi_1 + (1-t)\xi_2, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

Portanto, $t\xi_1 + (1-t)\xi_2 \in \partial f(x)$ para todo $t \in (0, 1)$ mostrando que $\partial f(x)$ é convexo.

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$,

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v)$$

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v) \leq |f^0(x; v)|,$$

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v) \leq |f^0(x; v)|,$$

donde segue-se, pela Propriedade (A_3), que

$$\langle \xi, v \rangle \leq K(x)||v||, \quad v \in X.$$

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v) \leq |f^0(x; v)|,$$

donde segue-se, pela Propriedade (A_3), que

$$\langle \xi, v \rangle \leq K(x)||v||, \quad v \in X.$$

Logo

$$||\xi||_{X^*} = \sup\{\langle \xi, v \rangle \ : \ ||v|| \leq 1, v \in X\} \leq K(x),$$

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v) \leq |f^0(x; v)|,$$

donde segue-se, pela Propriedade (A_3), que

$$\langle \xi, v \rangle \leq K(x)||v||, \quad v \in X.$$

Logo

$$||\xi||_{X^*} = \sup\{\langle \xi, v \rangle \ : \ ||v|| \leq 1, v \in X\} \leq K(x),$$

implicando que

$$\partial f(x) \subset \overline{B}_{K(x)}(0) \subset X^*$$

.

Mostraremos agora que $\partial f(x)$ é compacto fraco-$\star$.
Dado $\xi \in \partial f(x)$, observe que

$$\langle \xi, v \rangle \leq f^0(x; v) \leq |f^0(x; v)|,$$

donde segue-se, pela Propriedade (A_3), que

$$\langle \xi, v \rangle \leq K(x)||v||, \quad v \in X.$$

Logo

$$||\xi||_{X^*} = \sup\{\langle \xi, v \rangle \ : \ ||v|| \leq 1, v \in X\} \leq K(x),$$

implicando que

$$\partial f(x) \subset \overline{B}_{K(x)}(0) \subset X^*$$

.

5

Afirmação 1.2: $\partial f(x)$ é fechado fraco-$\star$.

5

Afirmação 1.2: $\partial f(x)$ é fechado fraco-$\star$.

De fato, seja $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial f(x)$ uma sequência,

5

Afirmação 1.2: $\partial f(x)$ é fechado fraco-$\star$.

De fato, seja $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial f(x)$ uma sequência, tal que

$$\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*,$$

5

Afirmação 1.2: $\partial f(x)$ é fechado fraco-$\star$.

De fato, seja $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial f(x)$ uma sequência, tal que

$$\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*,$$

isto é

$$\langle \xi_n, v\rangle \to \langle \xi_0, v\rangle, \quad v \in X.$$

Desde que $\xi_n \in \partial f(x)$

Desde que $\xi_n \in \partial f(x)$

$$\langle \xi_n, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad n \in \mathbb{N}, \quad v \in X$$

Desde que $\xi_n \in \partial f(x)$

$$\langle \xi_n, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad n \in \mathbb{N}, \quad v \in X$$

logo

$$\langle \xi_0, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

implicando que $\xi_0 \in \partial f(x)$, provando assim, a Afirmação 1.2.

Desde que $\xi_n \in \partial f(x)$

$$\langle \xi_n, v\rangle \leq f^0(x; v), \quad n \in \mathbb{N}, \quad v \in X$$

logo

$$\langle \xi_0, v\rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

implicando que $\xi_0 \in \partial f(x)$, provando assim, a Afirmação 1.2.

Sabendo que

- $\partial f(x)$ é fechado fraco-$\star$
- $\partial f(x) \subset \overline{B}_{K(x)}(0)$
- $\overline{B}_{K(x)}(0)$ é compacto na topologia fraca-* (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki),

temos

$$\partial f(x) \text{ é compacto fraco-}\star,$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 1.3

Para cada $x \in X$,

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: Para mostrar este lema, verificaremos que o ínfimo do conjunto

$$A = \{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

é atingido.

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: Para mostrar este lema, verificaremos que o ínfimo do conjunto

$$A = \{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

é atingido.

Sendo A limitado inferiormente,

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: Para mostrar este lema, verificaremos que o ínfimo do conjunto

$$A = \{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

é atingido.

Sendo A limitado inferiormente, defina

$$C_f(x) := \inf\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: Para mostrar este lema, verificaremos que o ínfimo do conjunto

$$A = \{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

é atingido.

Sendo A limitado inferiormente, defina

$$C_f(x) := \inf\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Neste caso, vai existir uma sequência $(\xi_n) \subset \partial f(x)$,

Lema 1.3

Para cada $x \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(x)$ tal que

$$||\xi_0||_{X^*} = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Demonstração: Para mostrar este lema, verificaremos que o ínfimo do conjunto

$$A = \{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\},$$

é atingido.

Sendo A limitado inferiormente, defina

$$C_f(x) := \inf\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

Neste caso, vai existir uma sequência $(\xi_n) \subset \partial f(x)$, tal que

$$||\xi_n||_{X^*} \to C_f(x). \tag{3}$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n)$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n) \text{ e } \xi_0 \in X^*$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n) \text{ e } \xi_0 \in X^*$$

tais que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*.$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n) \text{ e } \xi_0 \in X^*$$

tais que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*.$$

Sendo $\partial f(x)$ fechado fraco-$\star$,

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n) \text{ e } \xi_0 \in X^*$$

tais que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*.$$

Sendo $\partial f(x)$ fechado fraco-$\star$, concluímos que

$$\xi_0 \in \partial f(x).$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n) \text{ e } \xi_0 \in X^*$$

tais que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*.$$

Sendo $\partial f(x)$ fechado fraco-$\star$, concluímos que

$$\xi_0 \in \partial f(x).$$

Além disso

$$C_f(x) = \liminf_{j\to\infty} \|\xi_{n_j}\|_{X^*}$$

Segue, pelo fato de

$$(\xi_n) \text{ ser limitado em } X^*,$$

que existem

$$\text{uma subsequência } (\xi_{n_j}) \text{ de } (\xi_n) \text{ e } \xi_0 \in X^*$$

tais que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*.$$

Sendo $\partial f(x)$ fechado fraco-$\star$, concluímos que

$$\xi_0 \in \partial f(x).$$

Além disso

$$C_f(x) = \liminf_{j\to\infty} \|\xi_{n_j}\|_{X^*} \geq \|\xi_0\|_{X^*}.$$

Donde segue-se, pelo fato de $C_f(x) = \inf A$, que

$$C_f(x) = ||\xi_0||_{X^*},$$

pois $\xi_0 \in \partial f(x)$. ■

Donde segue-se, pelo fato de $C_f(x) = \inf A$, que

$$C_f(x) = ||\xi_0||_{X^*},$$

pois $\xi_0 \in \partial f(x)$. ■

Observação

No que segue, consideraremos $\lambda_f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$\lambda_f(x) = \min\{||\xi||_{X^*} \ : \ \xi \in \partial f(x)\}.$$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Para cada $v \in X$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Para cada $v \in X$

$$(f+g)^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big((f+g)(x+h+\lambda v) - (f+g)(x+h)\Big),$$

(P_2) Para cada $f, g \in Lip_{loc}(x, \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$$

e

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

Para cada $v \in X$

$$(f+g)^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big((f+g)(x+h+\lambda v) - (f+g)(x+h)\Big),$$

isto é,

$$(f+g)^0(x; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left(\sup \left\{ \frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{g(x+h+\lambda v) - g(x+h)}{\lambda} \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right)$$

Por propriedade de supremo

$$(f+g)^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to 0^+} \left(\sup\left\{ \frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} \right\} \right.$$
$$\left. + \sup\left\{ \frac{g(x+h+\lambda v) - g(x+h)}{\lambda} \quad : \quad \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta) \end{array} \right\} \right)$$

Por propriedade de supremo

$$(f+g)^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to 0^+} \left(\sup\left\{ \frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} \right\} \right.$$
$$\left. + \sup\left\{ \frac{g(x+h+\lambda v) - g(x+h)}{\lambda} \quad : \quad \begin{matrix} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta) \end{matrix} \right\} \right)$$

implicando que

$$(f+g)^0(x;v) \leq \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v) - f(x+h) \Big)$$
$$+ \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(g(x+h+\lambda v) - f(x+h) \Big),$$

Por propriedade de supremo

$$(f+g)^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to 0^+} \left(\sup\left\{ \frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} \right\} \right.$$
$$\left. + \sup\left\{ \frac{g(x+h+\lambda v) - g(x+h)}{\lambda} \quad : \quad \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta) \end{array} \right\} \right)$$

implicando que

$$(f+g)^0(x;v) \leq \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v) - f(x+h) \Big)$$
$$+ \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(g(x+h+\lambda v) - f(x+h) \Big),$$

ou seja,

$$(f+g)^0(x;v) \leq f^0(x;v) + g^0(x;v), \quad v \in X.$$

Sabendo que

$$(f+g)^0(x;v) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x) \subset X^*$$

Sabendo que

$$(f+g)^0(x;v) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x) \subset X^*$$

e

$$f^0(x;v)+g^0(x;v) \text{ é a função suporte de } \partial f(x)+\partial g(x) \subset X^*,$$

Sabendo que

$$(f+g)^0(x;v) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x) \subset X^*$$

e

$$f^0(x;v) + g^0(x;v) \text{ é a função suporte de } \partial f(x) + \partial g(x) \subset X^*,$$

segue da Propriedade (S_3) que

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x).$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados,

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$,

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$,

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ e $v_0 \in X$ com $\|v_0\| \leq 1$,

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ e $v_0 \in X$ com $\|v_0\| \le 1$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ e $v_0 \in X$ com $\|v_0\| \leq 1$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{n}$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ e $v_0 \in X$ com $\|v_0\| \leq 1$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{n} \text{ e } \xi_n \in \partial f(x_n),$$

(P_3) A função

$$\partial f : X \to \mathcal{P}(X^*) \text{ é semi-contínua superiormente,}$$

isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que se

$$\|x_0 - x\| < \delta \text{ e } \xi \in \partial f(x),$$

existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \varepsilon.$$

Com efeito, suponha por contradição que existam $x_0 \in X$, $\varepsilon_0 > 0$ e $v_0 \in X$ com $\|v_0\| \leq 1$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{n} \text{ e } \xi_n \in \partial f(x_n),$$

mas

$$|\langle \xi_n - \xi, v_0 \rangle| \geq \varepsilon_0, \quad \xi \in \partial f(x_0). \tag{4}$$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \quad n \geq n_1.$$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \quad n \geq n_1.$$

Daí,

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0), \quad n \geq n_1,$$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \quad n \geq n_1.$$

Daí,

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0), \quad n \geq n_1,$$

pois $\xi_n \in \partial f(x_n)$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \quad n \geq n_1.$$

Daí,

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0), \quad n \geq n_1,$$

pois $\xi_n \in \partial f(x_n)$ e $x_n \in N(x_0)$, para $n \geq n_1$.

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \quad n \geq n_1.$$

Daí,

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0), \quad n \geq n_1,$$

pois $\xi_n \in \partial f(x_n)$ e $x_n \in N(x_0)$, para $n \geq n_1$. Agora, defina

$$\overline{K} = \max\{||\xi_1||_{X^*}, \cdots, ||\xi_1||_{X^*}, K(x_0)\},$$

Sejam $N(x_0)$ uma vizinhança de x_0 e $K(x_0) > 0$ tais que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x_0)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x_0).$$

Sabendo que

$$x_n \to x_0 \text{ em } X,$$

fixe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in N(x_0), \quad n \geq n_1.$$

Daí,

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0), \quad n \geq n_1,$$

pois $\xi_n \in \partial f(x_n)$ e $x_n \in N(x_0)$, para $n \geq n_1$. Agora, defina

$$\overline{K} = \max\{||\xi_1||_{X^*}, \cdots, ||\xi_1||_{X^*}, K(x_0)\},$$

e observe que

$$||\xi_n||_{X^*} \leq \overline{K}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Deste fato vai existir uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n)

Deste fato vai existir uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*, \tag{5}$$

pois estamos considerando X um espaço separável.

Deste fato vai existir uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*, \tag{5}$$

pois estamos considerando X um espaço separável.

Afirmação 1.3 $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

Deste fato vai existir uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$(5) \qquad \xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*,$$

pois estamos considerando X um espaço separável.

Afirmação 1.3 $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

De fato, passando ao limite superior de $n_j \to \infty$ em

$$\langle \xi_{n_j}, v \rangle \leq f^0(x_{n_j}; v), \quad n_j \in \mathbb{N}, v \in X,$$

Deste fato vai existir uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*, \tag{5}$$

pois estamos considerando X um espaço separável.

Afirmação 1.3 $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

De fato, passando ao limite superior de $n_j \to \infty$ em

$$\langle \xi_{n_j}, v\rangle \leq f^0(x_{n_j}; v), \quad n_j \in \mathbb{N}, v \in X,$$

obtemos

$$\limsup_{n_j \to \infty} \langle \xi_{n_j}, v\rangle \leq \limsup_{n_j \to \infty} f^0(x_{n_j}; v), \quad v \in X,$$

Deste fato vai existir uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$(5) \qquad \xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*,$$

pois estamos considerando X um espaço separável.

Afirmação 1.3 $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

De fato, passando ao limite superior de $n_j \to \infty$ em

$$\langle \xi_{n_j}, v \rangle \leq f^0(x_{n_j}; v), \quad n_j \in \mathbb{N}, v \in X,$$

obtemos

$$\limsup_{n_j \to \infty} \langle \xi_{n_j}, v \rangle \leq \limsup_{n_j \to \infty} f^0(x_{n_j}; v), \quad v \in X,$$

obtendo da Propriedade (A_4), que

$$(6) \qquad \limsup_{n_j \to \infty} \langle \xi_{n_j}, v \rangle \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X,$$

De (5) e (6), temos

$$\langle \xi_0, v \rangle \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X,$$

mostrando assim a afirmação.

De (5) e (6), temos

$$\langle \xi_0, v \rangle \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X,$$

mostrando assim a afirmação.

Sabendo que $\xi_{n_j} \xrightarrow{*} \xi_0$, temos

$$\lim_{n_j \to \infty} \langle \xi_{n_j}, v \rangle = \langle \xi_0, v \rangle, \quad v \in X,$$

De (5) e (6), temos

$$\langle \xi_0, v \rangle \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X,$$

mostrando assim a afirmação.

Sabendo que $\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0$, temos

$$\lim_{n_j \to \infty} \langle \xi_{n_j}, v \rangle = \langle \xi_0, v \rangle, \quad v \in X,$$

sendo assim vai existir $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$|\langle \xi_{n_j} - \xi_0, v_0 \rangle| < \varepsilon_0, \quad n_j \geq n_0,$$

contradizendo (4). ■

Desta demonstração é possível concluir a seguinte afirmação:

Assuma que

$$x_n \to x \text{ em } X.$$

Desta demonstração é possível concluir a seguinte afirmação:

Assuma que

$$x_n \to x \text{ em } X.$$

Então vai existir uma sequência $\{\xi_{n_j}\} \subset \prod \partial f(x_{n_j})$

Desta demonstração é possível concluir a seguinte afirmação:

Assuma que

$$x_n \to x \text{ em } X.$$

Então vai existir uma sequência $\{\xi_{n_j}\} \subset \prod \partial f(x_{n_j})$ tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0 \text{ em } X^*,$$

para algum $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$,

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset X \times X^*$ é uma sequência

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que

- $\xi_j \in \partial f(x_j)$;

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que

- $\xi_j \in \partial f(x_j)$;
- $x_j \to x$ em X;

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que

- $\xi_j \in \partial f(x_j)$;
- $x_j \to x$ em X;
- $\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0$ em X^*, para algum $\xi_0 \in X^*$,

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que

- $\xi_j \in \partial f(x_j)$;
- $x_j \to x$ em X;
- $\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0$ em X^*, para algum $\xi_0 \in X^*$,

então

$$\xi_0 \in \partial f(x).$$

(P_4) A função $\partial f(.)$ é fechada fraco-$\star$, isto é, se $(x_j, \xi_j) \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que

- $\xi_j \in \partial f(x_j)$;
- $x_j \to x$ em X;
- $\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi_0$ em X^*, para algum $\xi_0 \in X^*$,

então

$$\xi_0 \in \partial f(x).$$

Recorde primeiramente que

$$\langle \xi_j, v \rangle \leq f^0(x_j; v), \quad j \in \mathbb{N}, v \in X,$$

logo passando ao limite superior $j \to \infty$, obtemos pela Propriedade (A_4)

$$\langle \xi_0, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X,$$

mostrando que $\xi_0 \in \partial f(x)$. ■

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente,

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em X

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em X tal que

$$\liminf_{x_n \to x_0} \lambda_f(x_n) < \lambda_f(x_0). \tag{7}$$

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em X tal que

$$\liminf_{x_n \to x_0} \lambda_f(x_n) < \lambda_f(x_0). \tag{7}$$

Agora, assuma que

- $||\xi_n||_{X^*} = \lambda_f(x_n)$, com $\xi_n \in \partial f(x_n)$;

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em X tal que

$$\liminf_{x_n \to x_0} \lambda_f(x_n) < \lambda_f(x_0). \tag{7}$$

Agora, assuma que

- $||\xi_n||_{X^*} = \lambda_f(x_n)$, com $\xi_n \in \partial f(x_n)$;
- $||\xi_0||_{X^*} = \lambda_f(x_0)$, com $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em X tal que

(7) $$\liminf_{x_n \to x_0} \lambda_f(x_n) < \lambda_f(x_0).$$

Agora, assuma que

- $||\xi_n||_{X^*} = \lambda_f(x_n)$, com $\xi_n \in \partial f(x_n)$;
- $||\xi_0||_{X^*} = \lambda_f(x_0)$, com $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

Uma vez que $x_n \to x_0$ em X,

(P_5) O funcional $x \mapsto \lambda_f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,

$$\liminf_{x \to x_0} \lambda_f(x) \geq \lambda_f(x_0).$$

Com efeito, suponha que exista $x_n \to x_0$ em X tal que

$$\liminf_{x_n \to x_0} \lambda_f(x_n) < \lambda_f(x_0). \tag{7}$$

Agora, assuma que

- $||\xi_n||_{X^*} = \lambda_f(x_n)$, com $\xi_n \in \partial f(x_n)$;
- $||\xi_0||_{X^*} = \lambda_f(x_0)$, com $\xi_0 \in \partial f(x_0)$.

Uma vez que $x_n \to x_0$ em X, temos

$$||\xi_n||_{X^*} \leq K(x_0).$$

Daí, existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n)

Daí, existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^* \text{ em } X^*,$$

para algum $\xi^* \in \partial f(x_0)$.

Daí, existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \stackrel{*}{\rightharpoonup} \xi^* \text{ em } X^*,$$

para algum $\xi^* \in \partial f(x_0)$. Assim,

$$\liminf_{n_j \to \infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi^*||_{X^*}.$$

Daí, existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^* \text{ em } X^*,$$

para algum $\xi^* \in \partial f(x_0)$. Assim,

$$\liminf_{n_j \to \infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi^*||_{X^*}.$$

Desde que $||\xi^*||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*}$,

Daí, existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^* \text{ em } X^*,$$

para algum $\xi^* \in \partial f(x_0)$. Assim,

$$\liminf_{n_j \to \infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi^*||_{X^*}.$$

Desde que $||\xi^*||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*}$, temos

$$\liminf_{n_j \to \infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*},$$

Daí, existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi^* \text{ em } X^*,$$

para algum $\xi^* \in \partial f(x_0)$. Assim,

$$\liminf_{n_j \to \infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi^*||_{X^*}.$$

Desde que $||\xi^*||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*}$, temos

$$\liminf_{n_j \to \infty} ||\xi_{n_j}||_{X^*} \geq ||\xi_0||_{X^*},$$

ou seja,

$$\liminf_{j \to \infty} \lambda_f(x_{n_j}) \geq \lambda_f(x_0),$$

contradizendo (7). ■

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$,

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

Já sabemos que

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X. \tag{8}$$

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

Já sabemos que

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X. \tag{8}$$

De (8)

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi, v\rangle \leq f'(x)v, \ v \in X\},$$

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

Já sabemos que

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X. \tag{8}$$

De (8)

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi, v\rangle \leq f'(x)v, \ v \in X\},$$

ou equivalentemente

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi - f'(x), v\rangle \leq 0, \ v \in X\},$$

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

Já sabemos que

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X. \tag{8}$$

De (8)

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi, v \rangle \leq f'(x)v, \ v \in X\},$$

ou equivalentemente

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi - f'(x), v \rangle \leq 0, \ v \in X\},$$

implicando que $\xi - f'(x) \equiv 0$

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

Já sabemos que

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X. \tag{8}$$

De (8)

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi, v \rangle \leq f'(x)v, \ v \in X\},$$

ou equivalentemente

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi - f'(x), v \rangle \leq 0, \ v \in X\},$$

implicando que $\xi - f'(x) \equiv 0$ (pois $\xi - f'(x) \in X^*$),

(P_6) Se f é de classe C^1 em uma vizinhança aberta de $x \in X$, então

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}.$$

Já sabemos que

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X. \tag{8}$$

De (8)

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi, v \rangle \leq f'(x)v, \ v \in X\},$$

ou equivalentemente

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ \langle \xi - f'(x), v \rangle \leq 0, \ v \in X\},$$

implicando que $\xi - f'(x) \equiv 0$ (pois $\xi - f'(x) \in X^*$), isto é

$$\xi = f'(x),$$

provando esta propriedade. ■

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$,

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4: $(f+g)^0(x; v) \geq f^0(x; v) + g^0(x; v), \quad v \in X.$

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4: $(f+g)^0(x; v) \geq f^0(x; v) + g^0(x; v), \quad v \in X.$

De fato, sejam $h_n \to 0$ em X

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4: $(f+g)^0(x; v) \geq f^0(x; v) + g^0(x; v), \quad v \in X.$

De fato, sejam $h_n \to 0$ em X e $\lambda_n \to 0^+$ em $\mathbb{R}$

(P_7) Se $f \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4: $(f+g)^0(x;v) \geq f^0(x;v) + g^0(x;v), \quad v \in X$.

De fato, sejam $h_n \to 0$ em X e $\lambda_n \to 0^+$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+h_n+\lambda_n v) - g(x+h_n)}{\lambda_n} = g^0(x;v)$$

(P_7) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4: $(f+g)^0(x; v) \geq f^0(x; v) + g^0(x; v), \quad v \in X.$

De fato, sejam $h_n \to 0$ em X e $\lambda_n \to 0^+$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x + h_n + \lambda_n v) - g(x + h_n)}{\lambda_n} = g^0(x; v)$$

e assuma

$$w_n(x, v) := \frac{f(x + h_n + \lambda_n v) - f(x + h_n)}{\lambda_n}$$

(P_7) Se $f \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$, então

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$, mostraremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1.4: $(f+g)^0(x;v) \geq f^0(x;v) + g^0(x;v), \quad v \in X.$

De fato, sejam $h_n \to 0$ em X e $\lambda_n \to 0^+$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x+h_n+\lambda_n v) - g(x+h_n)}{\lambda_n} = g^0(x;v)$$

e assuma

$$w_n(x,v) := \frac{f(x+h_n+\lambda_n v) - f(x+h_n)}{\lambda_n}$$

e

$$u_n(x,v) := \frac{g(x+h_n+\lambda_n v) - g(x+h_n)}{\lambda_n}.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, v) = g^0(x; v),$$

Daí,

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x, v) = g^0(x; v),$$

e como $f \in C^1(X, \mathbb{R})$,

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x, v) = g^0(x; v),$$

e como $f \in C^1(X, \mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x, v) = f^0(x; v).$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,v) = g^0(x;v),$$

e como $f \in C^1(X,\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x,v) = f^0(x;v).$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) = f^0(x;v) + g^0(x;v).$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,v) = g^0(x;v),$$

e como $f \in C^1(X,\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x,v) = f^0(x;v).$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) = f^0(x;v) + g^0(x;v).$$

Por outro lado

$$\lim_{n\to\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) \leq (f+g)^0(x;v),$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,v) = g^0(x;v),$$

e como $f \in C^1(X,\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x,v) = f^0(x;v).$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) = f^0(x;v) + g^0(x;v).$$

Por outro lado

$$\lim_{n\to\infty} \big(w_n(x,v) + u_n(x,v)\big) \leq (f+g)^0(x;v),$$

implicando

$$(f+g)^0(x;v) \geq f^0(x;v) + g^0(x;v),$$

mostrando a Afirmação 1.4.

Observando que

$$(f+g)^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x)$$

Observando que

$$(f+g)^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x)$$

e

$$f^0(x;\cdot)+g^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial f(x)+\partial g(x),$$

Observando que

$$(f+g)^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x)$$

e

$$f^0(x;\cdot)+g^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial f(x)+\partial g(x),$$

segue da Afirmação 1.4 e da Propriedade (S_3)

$$\partial f(x)+\partial g(x)\subset \partial(f+g)(x),$$

Observando que

$$(f+g)^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial(f+g)(x)$$

e

$$f^0(x;\cdot)+g^0(x;\cdot) \text{ é a função suporte de } \partial f(x)+\partial g(x),$$

segue da Afirmação 1.4 e da Propriedade (S_3)

$$\partial f(x)+\partial g(x) \subset \partial(f+g)(x),$$

donde segue-se da Propriedade (P_2)

$$\partial f(x)+\partial g(x) = \partial(f+g)(x),$$

como queríamos mostrar.

Definição

Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser **ponto crítico** do funcional

$$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R}),$$

Definição

Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser **ponto crítico** do funcional

$$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R}),$$

se

$$0 \in \partial f(x_0),$$

Definição

Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser **ponto crítico** do funcional

$$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R}),$$

se

$$0 \in \partial f(x_0),$$

isto é

$$0 \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X.$$

Definição

Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser **ponto crítico** do funcional

$$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R}),$$

se

$$0 \in \partial f(x_0),$$

isto é

$$0 \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X.$$

Neste caso, diremos que $c \in \mathbb{R}$ é um **valor crítico** de f

Definição

Um ponto $x_0 \in X$ é dito ser **ponto crítico** do funcional

$$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R}),$$

se

$$0 \in \partial f(x_0),$$

isto é

$$0 \leq f^0(x_0; v), \quad v \in X.$$

Neste caso, diremos que $c \in \mathbb{R}$ é um **valor crítico** de f se existir um ponto crítico $x_0 \in X$ tal que

$$f(x_0) = c.$$

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local,

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Para cada $\lambda > 0$

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Para cada $\lambda > 0$ e $v \in X$

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Para cada $\lambda > 0$ e $v \in X$ tal que $x_0 + \lambda v \in B_\varepsilon(x_0)$,

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Para cada $\lambda > 0$ e $v \in X$ tal que $x_0 + \lambda v \in B_\varepsilon(x_0)$, observe que

$$f(x_0 + \lambda v) - f(x_0) \geq 0,$$

Lema 1.4

Se

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$e
- $x_0 \in X$ ponto de mínimo local de f,

tem-se que

$$x_0 \text{ é um ponto crítico para } f.$$

Demonstração: Sendo x_0 um ponto de mínimo local, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Para cada $\lambda > 0$ e $v \in X$ tal que $x_0 + \lambda v \in B_\varepsilon(x_0)$, observe que

$$f(x_0 + \lambda v) - f(x_0) \geq 0,$$

logo

$$\frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

e portanto

$$\limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

e portanto

$$\limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

donde segue-se, que

$$f^0(x_0; v) \geq 0, \quad v \in X.$$

e portanto

$$\limsup_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} \geq 0,$$

donde segue-se, que

$$f^0(x_0; v) \geq 0, \quad v \in X.$$

Logo, $0 \in \partial f(x_0)$. ■

Teorema 1.5 (Teorema do Valor Médio de Lebourg)

Sejam

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e

Teorema 1.5 (Teorema do Valor Médio de Lebourg)

Sejam

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e
- $x, y \in X$ tais que f é Lipschitz em $[x, y]$.

Teorema 1.5 (Teorema do Valor Médio de Lebourg)

Sejam

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e
- $x, y \in X$ tais que f é Lipschitz em $[x, y]$.

Então, existe um ponto

$$x_t = x + t(y - x), \ 0 < t < 1,$$

Teorema 1.5 (Teorema do Valor Médio de Lebourg)

Sejam

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e
- $x, y \in X$ tais que f é Lipschitz em $[x, y]$.

Então, existe um ponto

$$x_t = x + t(y - x),\ 0 < t < 1,$$

e $\xi_t \in \partial f(x_t)$

Teorema 1.5 (Teorema do Valor Médio de Lebourg)

Sejam

- $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e
- $x, y \in X$ tais que f é Lipschitz em $[x, y]$.

Então, existe um ponto

$$x_t = x + t(y - x), \ 0 < t < 1,$$

e $\xi_t \in \partial f(x_t)$ tais que

$$f(y) - f(x) = \langle \xi_t, y - x \rangle.$$

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia)

Sejam

- X e Y espaços de Banach;

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia)

Sejam

- X e Y espaços de Banach;
- $f : X \to Y$ de classe C^1;

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia)

Sejam

- X e Y espaços de Banach;
- $f : X \to Y$ de classe C^1;
- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia)

Sejam

- X e Y espaços de Banach;
- $f : X \to Y$ de classe C^1;
- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz e
- $F \equiv g \circ f : X \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia)

Sejam

- X e Y espaços de Banach;
- $f : X \to Y$ de classe C^1;
- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz e
- $F \equiv g \circ f : X \to \mathbb{R}$.

Então $F \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$

Teorema 1.6 (Regra da Cadeia)

Sejam

- X e Y espaços de Banach;
- $f : X \to Y$ de classe C^1;
- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz e
- $F \equiv g \circ f : X \to \mathbb{R}$.

Então $F \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$ e

$$\partial F(x) \subset \partial g(f(x)) \circ Df(x), \; x \in X.$$

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Então

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X.$$

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Então
$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X.$$

Demonstração: Segue pelo fato de
$$X \hookrightarrow Y \text{ continuamente,}$$

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Então

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X.$$

Demonstração: Segue pelo fato de

$$X \hookrightarrow Y \text{ continuamente},$$

que existe $K > 0$ tal que

$$||u||_Y \leq K||u||_X, \quad u \in X.$$

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Então

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X.$$

Demonstração: Segue pelo fato de

$$X \hookrightarrow Y \text{ continuamente},$$

que existe $K > 0$ tal que

$$||u||_Y \leq K||u||_X, \quad u \in X.$$

Sendo assim, a aplicação identidade

$$id : X \to Y \text{ é linear e contínua},$$

logo id é de classe C^1

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Então

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X.$$

Demonstração: Segue pelo fato de

$$X \hookrightarrow Y \text{ continuamente},$$

que existe $K > 0$ tal que

$$||u||_Y \leq K||u||_X, \quad u \in X.$$

Sendo assim, a aplicação identidade

$$id : X \to Y \text{ é linear e contínua},$$

logo id é de classe C^1 com $D(id)(x) = I$,

Corolário 1.7

Assuma que

- $g : Y \to \mathbb{R}$ um funcional Lipschitz sobre o espaço de Banach Y;
- X é um espaço de Banach imerso continuamente em Y;
- X é um subespaço denso em Y.

Então

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X.$$

Demonstração: Segue pelo fato de

$$X \hookrightarrow Y \text{ continuamente},$$

que existe $K > 0$ tal que

$$||u||_Y \leq K||u||_X, \quad u \in X.$$

Sendo assim, a aplicação identidade

$$id : X \to Y \text{ é linear e contínua},$$

logo id é de classe C^1 com $D(id)(x) = I$, onde $I : Y \to Y$ é, também, a aplicação identidade.

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x)$$

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x))$$

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x), \quad x \in X,$$

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x), \quad x \in X,$$

temos que $F \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x), \quad x \in X,$$

temos que $F \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ (pois g e id são Lipschitz).

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x), \quad x \in X,$$

temos que $F \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ (pois g e id são Lipschitz). Usando o Teorema da Regra da Cadeia

$$\partial F(x) \subset \partial g(id(x)) \circ D(id)(x),$$

Considerando $F : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x), \quad x \in X,$$

temos que $F \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ (pois g e id são Lipschitz). Usando o Teorema da Regra da Cadeia

$$\partial F(x) \subset \partial g(id(x)) \circ D(id)(x),$$

ou seja,

$$\partial(g|_X)(x) \subset \partial g(x), \quad x \in X. \blacksquare$$