# Teoria dos pontos críticos para funcionais não suaves e aplicações em problemas elípticos não-lineares

## Primeira Aula: Gradiente Generalizado

Prof. Jefferson Abrantes
( Universidade Federal de Campina Grande)

Programa de Verão em Matemática 2023
ICMC/USP

São Carlos-SP

# Motivação

O estudo de problemas com não-linearidades descontínuas atrai inúmeros autores por causa de suas aplicações na física-matemática.

# Motivação

O estudo de problemas com não-linearidades descontínuas atrai inúmeros autores por causa de suas aplicações na física-matemática.Podemos citar por exemplo:

- o **problema de obstáculo** (ver Chang, K. C., 1980 and VyKhoi, L., 2001);

# Motivação

O estudo de problemas com não-linearidades descontínuas atrai inúmeros autores por causa de suas aplicações na física-matemática.Podemos citar por exemplo:

- o **problema de obstáculo** (ver Chang, K. C., 1980 and VyKhoi, L., 2001);
- o **problema de Goldshtik para fluxos separados em um fluido incompreensível** (ver Goldshtik, M. and Hussain, F., 1998 and Potapov, D. K., 2010);

# Motivação

O estudo de problemas com não-linearidades descontínuas atrai inúmeros autores por causa de suas aplicações na física-matemática.Podemos citar por exemplo:

- o **problema de obstáculo** (ver Chang, K. C., 1980 and VyKhoi, L., 2001);
- o **problema de Goldshtik para fluxos separados em um fluido incompreensível** (ver Goldshtik, M. and Hussain, F., 1998 and Potapov, D. K., 2010);
- o **fenômeno da supercondutividade** (ver Potapov, D. K., 2011)

# Motivação

O estudo de problemas com não-linearidades descontínuas atrai inúmeros autores por causa de suas aplicações na física-matemática.Podemos citar por exemplo:

- o **problema de obstáculo** (ver Chang, K. C., 1980 and VyKhoi, L., 2001);
- o **problema de Goldshtik para fluxos separados em um fluido incompreensível** (ver Goldshtik, M. and Hussain, F., 1998 and Potapov, D. K., 2010);
- o **fenômeno da supercondutividade** (ver Potapov, D. K., 2011) e
- o **problema de Elenbaas para origem de descarga elétrica** (ver Elenbaas, W., et al, 1965 and Ambrosetti, A. and Turner, R. E. L., 1988).

Este último fornece um modelo matemático da origem de uma descarga elétrica ao longo de um cilindro eletricamente isolado preenchido com um gás ionizado sob a ação de um campo elétrico constante.

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura em um arco elétrico é a equação de Elenbaas dada por:

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura em um arco elétrico é a equação de Elenbaas dada por:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = |E|^2\sigma(x,u(x)) & \text{em} \quad U, \\ u = u_0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura em um arco elétrico é a equação de Elenbaas dada por:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = |E|^2\sigma(x,u(x)) & \text{em} \quad U, \\ u = u_0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

onde

- $u(x)$ é a temperatura do gás no ponto $x$;

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura em um arco elétrico é a equação de Elenbaas dada por:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = |E|^2\sigma(x,u(x)) & \text{em} \quad U, \\ u = u_0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

onde

- $u(x)$ é a temperatura do gás no ponto $x$;
- $|E|^2$ é o campo de densidade elétrico;

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura em um arco elétrico é a equação de Elenbaas dada por:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = |E|^2\sigma(x,u(x)) & \text{em} \quad U, \\ u = u_0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

onde

- $u(x)$ é a temperatura do gás no ponto $x$;
- $|E|^2$ é o campo de densidade elétrico;
- $K(x,u(x))$ é a condutividade do calor;

# Motivação

Seja $U$ uma seção transversal de um cilindro contendo um gás ionizado com uma temperatura constante $u_0$ na lateral do cilindro.

A equação diferencial que descreve a distribuição de temperatura em um arco elétrico é a equação de Elenbaas dada por:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K(x,u(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = |E|^2\sigma(x,u(x)) & \text{em} \quad U, \\ u = u_0 & \text{sobre} \quad \partial U, \end{cases}$$

onde

- $u(x)$ é a temperatura do gás no ponto $x$;
- $|E|^2$ é o campo de densidade elétrico;
- $K(x,u(x))$ é a condutividade do calor;
- $\sigma(x,u(x))$ a condutividade elétrica.

# Exemplo

Fixado $x \in U$ em certas temperaturas, a condutividade elétrica $\sigma(x, .)$ pode dar saltos,

# Exemplo

Fixado $x \in U$ em certas temperaturas, a condutividade elétrica $\sigma(x, .)$ pode dar saltos, isto é, se $a > u_0$ é a temperatura de descarga no gás, a condutividade elétrica:

$$\sigma(x,u) = \begin{cases} |u|^{p-1}u \text{ para } u(x) < a \\ \end{cases}$$

# Exemplo

Fixado $x \in U$ em certas temperaturas, a condutividade elétrica $\sigma(x,.)$ pode dar saltos, isto é, se $a > u_0$ é a temperatura de descarga no gás, a condutividade elétrica:

$$\sigma(x,u) = \begin{cases} |u|^{p-1}u \text{ para } u(x) < a \\ |u|^{p-1}u + u^q \text{ para } u(x) \geq a \end{cases}$$

onde $p, q \in (0,1)$ (crescimento sublinear).

Considerando

- $U$ um domínio limitado do $R^N$ $(N \geq 1)$;

Considerando

- $U$ um domínio limitado do $R^N$ ($N \geq 1$);
- $u_0 = 0$;

Considerando

- $U$ um domínio limitado do $R^N$ $(N \geq 1)$;
- $u_0 = 0$;
- $|E| = 1$;

Considerando

- $U$ um domínio limitado do $R^N$ $(N \geq 1)$;
- $u_0 = 0$;
- $|E| = 1$;
- $K(x, u) = 1$.

Considerando

- $U$ um domínio limitado do $R^N$ $(N \geq 1)$;
- $u_0 = 0$;
- $|E| = 1$;
- $K(x, u) = 1$.

Assim, o modelo da equação de Elenbaas se torna um problema com não-linearidade descontínua

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q \chi_{[u \geq a]} + |u|^{p-1} u \text{ em } U, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial U \end{cases}$$

onde

- $\chi$ é a função característica e
- $[u \geq a] := \{x \in \Omega \, : \, u(x) \geq a\}$.

# Funcionais localmente Lipschitz

Nosso principal objetivo aqui é mostrar a definição e as propriedades do Gradiente Generalizado associado a um funcional Localmente Lipschitz

# Funcionais localmente Lipschitz

Nosso principal objetivo aqui é mostrar a definição e as propriedades do Gradiente Generalizado associado a um funcional Localmente Lipschitz (esta teoria foi introduzida por F.H. Clarke em 1975).

# Funcionais localmente Lipschitz

Nosso principal objetivo aqui é mostrar a definição e as propriedades do Gradiente Generalizado associado a um funcional Localmente Lipschitz (esta teoria foi introduzida por F.H. Clarke em 1975).
E para isso nos basearemos nas seguintes referências:

- F. H. Clarke, SIAM, Philadelphia, 1990.

# Funcionais localmente Lipschitz

Nosso principal objetivo aqui é mostrar a definição e as propriedades do Gradiente Generalizado associado a um funcional Localmente Lipschitz (esta teoria foi introduzida por F.H. Clarke em 1975).
E para isso nos basearemos nas seguintes referências:

- F. H. Clarke, SIAM, Philadelphia, 1990.
- M.R. Grossinho & S.A. Tersian, Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001.

No que segue $(X, \|.\|)$ denota um espaço de Banach separável e **reflexivo.**

### Definição

Um funcional

$f : X \to \mathbb{R}$ é dito ser um **funcional localmente Lipschitz**

No que segue $(X, \|.\|)$ denota um espaço de Banach separável e **reflexivo.**

**Definição**

Um funcional

$f : X \to \mathbb{R}$ é dito ser um **funcional localmente Lipschitz**

(e denotamos por $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$),

No que segue $(X, \|.\|)$ denota um espaço de Banach separável e **reflexivo.**

### Definição

Um funcional

$f : X \to \mathbb{R}$ é dito ser um **funcional localmente Lipschitz**

(e denotamos por $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$), se para cada $x \in X$,

No que segue $(X, \|.\|)$ denota um espaço de Banach separável e **reflexivo.**

## Definição

Um funcional

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ é dito ser um } \textbf{funcional localmente Lipschitz}$$

(e denotamos por $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$), se para cada $x \in X$, existirem:

- uma vizinhança aberta de $x$, $N(x)$,

No que segue $(X, \|.\|)$ denota um espaço de Banach separável e **reflexivo.**

## Definição

Um funcional

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ é dito ser um } \textbf{funcional localmente Lipschitz}$$

(e denotamos por $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$), se para cada $x \in X$, existirem:

- uma vizinhança aberta de $x$, $N(x)$, e
- uma constante $K(x)$,

tal que

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq K(x)\|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in N(x).$$

Quando a desigualdade acima ocorre em todo o espaço $X$, a função $f$ é dita ser **Lipschitz.**

# Derivada direcional generalizada

**Definição**

A **Derivada Direcional Generalizada** de um funcional localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$,

# Derivada direcional generalizada

**Definição**

A **Derivada Direcional Generalizada** de um funcional localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $x \in X$

# Derivada direcional generalizada

**Definição**

A **Derivada Direcional Generalizada** de um funcional localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $x \in X$ na direção de $v \in X$,

# Derivada direcional generalizada

**Definição**

A **Derivada Direcional Generalizada** de um funcional localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $x \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $f^0(x; v)$,

# Derivada direcional generalizada

**Definição**

A **Derivada Direcional Generalizada** de um funcional localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $x \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $f^0(x; v)$, é definido por

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{f(x + h + \lambda v) - f(x + h)}{\lambda}.$$

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,então

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \; v \in X.$$

Se $f$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$,

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,então

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \; v \in X.$$

Se $f$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$, então

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \left( \frac{f(x+h) + \lambda v f'(x+h) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} ||v|| \right),$$

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,então

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \; v \in X.$$

Se $f$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$, então

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \left( \frac{f(x+h) + \lambda v f'(x+h) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} ||v|| \right),$$

onde $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} = 0,$

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,então

$$f^0(x; v) = f'(x)v,\ v \in X.$$

Se $f$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$, então

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \left( \frac{f(x+h) + \lambda v f'(x+h) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} ||v|| \right),$$

onde $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} = 0$, implicando que

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} f'(x+h)v.$$

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,então

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \; v \in X.$$

Se $f$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$, então

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \left( \frac{f(x+h) + \lambda v f'(x+h) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} ||v|| \right),$$

onde $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} = 0$, implicando que

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} f'(x+h)v.$$

Sendo $f'$ contínua na vizinhança $V_x$

Observação: Se $f : X \to \mathbb{R}$ é de Classe $C^1$ em uma vizinhança aberta de $x \in X$,então

$$f^0(x; v) = f'(x)v, \; v \in X.$$

Se $f$ é de classe $C^1$ em uma vizinhança aberta $V_x$ com $x \in V_x \subset X$, então

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \left( \frac{f(x+h) + \lambda v f'(x+h) - f(x+h)}{\lambda} + \frac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} ||v|| \right),$$

onde $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{o(\lambda v)}{\lambda ||v||} = 0$, implicando que

$$f^0(x; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} f'(x+h)v.$$

Sendo $f'$ contínua na vizinhança $V_x$ podemos concluir que

(1) $$f^0(x; v) = f'(x)v, \quad v \in X.$$

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo,

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot): X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X;$

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X$; (b)

$f^0(x; kv) = kf^0(x; v), \quad v \in X \;\; k \geq 0.$

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X$; (b)

$f^0(x; kv) = kf^0(x; v), \quad v \in X \;\; k \geq 0.$

$(A_2)$ $f^0(x;\cdot)$ é um funcional convexo.

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X$; (b)

$f^0(x; kv) = kf^0(x; v), \quad v \in X \;\; k \geq 0.$

$(A_2)$ $f^0(x;\cdot)$ é um funcional convexo.

Dados $v_1, v_2 \in X$ e $t \in [0, 1]$,

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X$; (b) $f^0(x; kv) = kf^0(x; v), \quad v \in X \;\; k \geq 0$.

$(A_2)$ $f^0(x;\cdot)$ é um funcional convexo.

Dados $v_1, v_2 \in X$ e $t \in [0, 1]$,tem-se de $(A_1)$ que

$$f^0(x; tv_1 + (1-t)v_2) \leq f^0(x, tv_1) + f^0(x, (1-t)v_2).$$

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X$; (b) $f^0(x; kv) = kf^0(x; v), \quad v \in X \;\; k \geq 0$.

$(A_2)$ $f^0(x;\cdot)$ é um funcional convexo.

Dados $v_1, v_2 \in X$ e $t \in [0, 1]$,tem-se de $(A_1)$ que

$$f^0(x; tv_1 + (1-t)v_2) \leq f^0(x, tv_1) + f^0(x, (1-t)v_2).$$

Tendo em vista que $t, (1-t) \geq 0$,

A seguir iremos mostrar algumas propriedades de Derivada Direcional Generalizada.

$(A_1)$ $f^0(x;\cdot): X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogêneo positivo, isto é, para todo $x \in X$ temos:

(a) $f^0(x, v_1 + v_2) \leq f^0(x, v_1) + f^0(x, v_2), \quad v_1, v_2 \in X$; (b)

$f^0(x; kv) = kf^0(x; v), \quad v \in X \;\; k \geq 0$.

$(A_2)$ $f^0(x;\cdot)$ é um funcional convexo.

Dados $v_1, v_2 \in X$ e $t \in [0, 1]$,tem-se de $(A_1)$ que

$$f^0(x; tv_1 + (1-t)v_2) \leq f^0(x, tv_1) + f^0(x, (1-t)v_2).$$

Tendo em vista que $t, (1-t) \geq 0$,segue novamente de $(A_1)$ que

$$f^0(x; tv_1 + (1-t)v_2) \leq tf^0(x, v_1) + (1-t)f^0(x, v_2).$$

$(A_3)$ $|f^0(x; v)| \leq K(x)||v||$.

$(A_3)$ $|f^0(x;v)| \leq K(x)||v||$.

Observe que

$$f^0(x;v) \quad = \quad \limsup_{h\to 0, \lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v) - f(x+h)\Big)$$

$(A_3)$ $|f^0(x;v)| \leq K(x)||v||$.

Observe que

$$\begin{aligned} f^0(x;v) &= \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v) - f(x+h)\Big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0, \delta\to 0^+} \left(\sup\left\{\frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} \; : \; \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta) \end{array}\right\}\right) \end{aligned}$$

$(A_3)$ $|f^0(x;v)| \leq K(x)||v||$.

Observe que

$$\begin{array}{rcl} f^0(x;v) & = & \displaystyle\limsup_{h\to 0,\lambda\to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(x+h+\lambda v) - f(x+h)\Big) \\ & = & \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} \left(\sup\left\{ \frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda} \;:\; \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta) \end{array} \right\}\right) \end{array}$$

donde segue-se, por propriedade de supremo, que

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} \left(\sup\left\{ \left|\frac{f(x+h+\lambda v) - f(x+h)}{\lambda}\right| \;:\; \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0,\delta) \end{array} \right\}\right).$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$, tem-se

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} K(x)||v|| = K(x)||v||.$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X; \mathbb{R})$, tem-se

$$f^0(x; v) \leq \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} K(x)||v|| = K(x)||v||.$$

Analogamente, mostra-se que

$$f^0(x; v) \geq -K(x)||v||,$$

Sendo $f \in Lip_{loc}(X;\mathbb{R})$, tem-se

$$f^0(x;v) \leq \lim_{\varepsilon\to 0,\delta\to 0^+} K(x)||v|| = K(x)||v||.$$

Analogamente, mostra-se que

$$f^0(x;v) \geq -K(x)||v||,$$

donde segue que

$$|f^0(x;v)| \leq K(x)||v||,$$

como queríamos mostrar.

$(A_4)$ $f^0(x; v)$ é uma função semicontínua superiormente,

$(A_4)$ $f^0(x; v)$ é uma função semicontínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{j \to \infty} f^0(x_j; v_j) \leq f^0(x; v),$$

$(A_4)$ $f^0(x; v)$ é uma função semicontínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{j \to \infty} f^0(x_j; v_j) \leq f^0(x; v),$$

onde $\lim_{j \to \infty} (x_j, v_j) = (x, v)$, $(x, v) \in X \times X$.

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz,

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$,

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$, isto é,

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)\|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$, isto é,

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)\|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Observe que de $(A_1)$

$$f^0(x;u) = f^0(x;u - v + v) \leq f^0(x;u - v) + f^0(x;v),$$

($A_5$) $f^0(x;\cdot): X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$, isto é,

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)\|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Observe que de ($A_1$)

$$f^0(x;u) = f^0(x;u - v + v) \leq f^0(x;u - v) + f^0(x;v),$$

e

$$f^0(x;v) = f^0(x;v - u + u) \leq f^0(x;v - u) + f^0(x;u).$$

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$, isto é,

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)\|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Observe que de $(A_1)$

$$f^0(x;u) = f^0(x;u - v + v) \leq f^0(x;u - v) + f^0(x;v),$$

e

$$f^0(x;v) = f^0(x;v - u + u) \leq f^0(x;v - u) + f^0(x;u).$$

Assim,

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq f^0(x;u - v)$$

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$, isto é,

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)\|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Observe que de $(A_1)$

$$f^0(x;u) = f^0(x;u - v + v) \leq f^0(x;u - v) + f^0(x;v),$$

e

$$f^0(x;v) = f^0(x;v - u + u) \leq f^0(x;v - u) + f^0(x;u).$$

Assim,

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq f^0(x;u - v) \leq |f^0(x;u - v)|,$$

$(A_5)$ $f^0(x;\cdot) : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitz, com constante Lipschitz $K(x)$, isto é,

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)\|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Observe que de $(A_1)$

$$f^0(x;u) = f^0(x;u - v + v) \leq f^0(x;u - v) + f^0(x;v),$$

e

$$f^0(x;v) = f^0(x;v - u + u) \leq f^0(x;v - u) + f^0(x;u).$$

Assim,

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq f^0(x;u - v) \leq |f^0(x;u - v)|,$$

e por $(A_3)$

$$f^0(x;u) - f^0(x;v) \leq K(x)\|u - v\|. \tag{2}$$

Por outro lado,

$$f^0(x; v) - f^0(x; u) \leq f^0(x; v - u)$$

Por outro lado,

$$f^0(x; v) - f^0(x; u) \leq f^0(x; v - u) \leq |f^0(x; v - u)|,$$

Por outro lado,

$$f^0(x; v) - f^0(x; u) \leq f^0(x; v - u) \leq |f^0(x; v - u)|,$$

donde segue de $(A_3)$

(3) $$f^0(x; v) - f^0(x; u) \leq K(x)||v - u|| = K(x)||u - v||.$$

Por outro lado,

$$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq f^0(x;v-u) \leq |f^0(x;v-u)|,$$

donde segue de $(A_3)$

(3) $$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq K(x)||v-u|| = K(x)||u-v||.$$

Dessa forma, combinando (2) e (3), temos

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)||u-v||, \quad u,v \in X.$$

Por outro lado,

$$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq f^0(x;v-u) \leq |f^0(x;v-u)|,$$

donde segue de $(A_3)$

(3) $$f^0(x;v) - f^0(x;u) \leq K(x)||v-u|| = K(x)||u-v||.$$

Dessa forma, combinando (2) e (3), temos

$$|f^0(x;u) - f^0(x;v)| \leq K(x)||u-v||, \quad u, v \in X.$$

$(A_6)$ $f^0(x;-v) = (-f)^0(x;v), \quad x, v \in X$.

### Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$

### Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$ é um subconjunto $\partial f(x) \subset X^*$

## Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$ é um subconjunto $\partial f(x) \subset X^*$ definido por

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \ v \in X\}.$$

### Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$ é um subconjunto $\partial f(x) \subset X^*$ definido por

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \; : \; f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \; v \in X\}.$$

### Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é uma função localmente Lipschitz

## Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$ é um subconjunto $\partial f(x) \subset X^*$ definido por

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \;:\; f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle,\; v \in X\}.$$

## Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é uma função localmente Lipschitz com

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } \; x > 0; \\ & \\ & \end{cases}$$

## Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$ é um subconjunto $\partial f(x) \subset X^*$ definido por

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \ v \in X\}.$$

## Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é uma função localmente Lipschitz com

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } \ x > 0; \\ [-1, 1], & \text{se } \ x = 0; \\ & \end{cases}$$

## Definição

O **Gradiente Generalizado** de $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $x \in X$ é um subconjunto $\partial f(x) \subset X^*$ definido por

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^* \ : \ f^0(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \ v \in X\}.$$

## Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é uma função localmente Lipschitz com

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } x > 0; \\ [-1, 1], & \text{se } x = 0; \\ \{-1\}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que $f$ é uma função Lipschitz, implicando que $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Note que $f$ é uma função Lipschitz, implicando que $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Para $x = 0$, temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Note que $f$ é uma função Lipschitz, implicando que $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Para $x = 0$, temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}.$$

De fato, pois para $v > 0$, temos

$$f^0(0; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(h + \lambda v) - f(h)\Big),$$

Note que $f$ é uma função Lipschitz, implicando que $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Para $x = 0$, temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}.$$

De fato, pois para $v > 0$, temos

$$f^0(0; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(h + \lambda v) - f(h)\Big),$$

donde segue

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \ : \ \begin{matrix} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{matrix} \right\} \right),$$

Note que $f$ é uma função Lipschitz, implicando que $f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Para $x = 0$, temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}.$$

De fato, pois para $v > 0$, temos

$$f^0(0; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda}\Big(f(h + \lambda v) - f(h)\Big),$$

donde segue

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

isto é,

$$(4) \quad f^0(0; v) = v \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right).$$

**Afirmação 1**: Dados $\varepsilon, \delta > 0$ e $v > 0$,

$$\sup\left\{ \frac{f(h+\lambda v) - f(h)}{v\lambda} \quad : \quad h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\} = 1.$$

**Afirmação 1**: Dados $\varepsilon, \delta > 0$ e $v > 0$,

$$\sup \left\{ \frac{f(h+\lambda v) - f(h)}{v\lambda} \quad : \quad h \in B_{\varepsilon}, \lambda \in (0,\delta) \right\} = 1.$$

De fato, dados $\lambda, \varepsilon > 0$ e $v > 0$ observe que 1 é uma cota superior para o conjunto

$$H = \left\{ \frac{f(h+\lambda v) - f(h)}{v\lambda} \quad : \quad h \in B_{\varepsilon}, \lambda \in (0,\delta) \right\},$$

**Afirmação 1**: Dados $\varepsilon, \delta > 0$ e $v > 0$,

$$\sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} \quad : \quad h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\} = 1.$$

De fato, dados $\lambda, \varepsilon > 0$ e $v > 0$ observe que 1 é uma cota superior para o conjunto

$$H = \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} \quad : \quad h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\},$$

pois

$$\frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} = \frac{|h + \lambda v| - |h|}{v\lambda},$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} \quad \leq \quad \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda}$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda} \\
&= 1, \quad h \in B_\varepsilon,\ \lambda \in (0,\delta).
\end{aligned}
$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned}\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda} \\ &= 1, \quad h\in B_\varepsilon,\ \lambda\in(0,\delta).\end{aligned}$$

Observe, agora, que $1\in H$,

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned}\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda}\\ &= 1, \quad h \in B_{\varepsilon},\ \lambda \in (0,\delta).\end{aligned}$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned}\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda}\\ &= 1, \quad h \in B_\varepsilon,\ \lambda \in (0,\delta).\end{aligned}$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$ temos

$$\frac{f(0+\lambda v)-f(0)}{v\lambda} = \frac{|0+\lambda v|-|0|}{v\lambda}$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned}\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda} \\ &= 1, \quad h \in B_{\varepsilon},\ \lambda \in (0,\delta).\end{aligned}$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$ temos

$$\frac{f(0+\lambda v)-f(0)}{v\lambda} = \frac{|0+\lambda v|-|0|}{v\lambda} = \frac{|\lambda v|}{\lambda v}$$

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$
\begin{aligned}
\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda} \\
&= 1, \quad h \in B_\varepsilon,\ \lambda \in (0,\delta).
\end{aligned}
$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$ temos

$$
\frac{f(0+\lambda v)-f(0)}{v\lambda} = \frac{|0+\lambda v|-|0|}{v\lambda} = \frac{|\lambda v|}{\lambda v} = 1,
$$

pois $v, \lambda > 0$.

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned}\frac{f(h+\lambda v)-f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h|+|\lambda v|-|h|}{v\lambda}\\ &= 1, \quad h \in B_\varepsilon,\ \lambda \in (0,\delta).\end{aligned}$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$ temos

$$\frac{f(0+\lambda v)-f(0)}{v\lambda} = \frac{|0+\lambda v|-|0|}{v\lambda} = \frac{|\lambda v|}{\lambda v} = 1,$$

pois $v, \lambda > 0$. Mostrando assim a Afirmação 1.

donde segue-se, pela desigualdade triângular, que

$$\begin{aligned} \frac{f(h+\lambda v) - f(h)}{v\lambda} &\leq \frac{|h| + |\lambda v| - |h|}{v\lambda} \\ &= 1, \quad h \in B_\varepsilon, \ \lambda \in (0, \delta). \end{aligned}$$

Observe, agora, que $1 \in H$, pois considerando $h = 0$ temos

$$\frac{f(0+\lambda v) - f(0)}{v\lambda} = \frac{|0+\lambda v| - |0|}{v\lambda} = \frac{|\lambda v|}{\lambda v} = 1,$$

pois $v, \lambda > 0$. Mostrando assim a Afirmação 1.
Da Afirmação 1 e (4) concluímos que

$$f^0(0; v) = v, \quad v > 0. \tag{5}$$

Se $v < 0$,

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \ : \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

Se $v < 0$,

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

donde segue-se, por propriedade de supremo e de limite, que

$$f^0(0; v) = (-v) \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{(-v)\lambda} \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

Se $v < 0$,

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \quad : \quad \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

donde segue-se, por propriedade de supremo e de limite, que

$$f^0(0; v) = (-v) \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{(-v)\lambda} \quad : \quad \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

pois $-v > 0$.

Se $v < 0$,

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

donde segue-se, por propriedade de supremo e de limite, que

$$f^0(0; v) = (-v) \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{(-v)\lambda} \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

pois $-v > 0$. De modo análogo a Afirmação 1, mostra-se que

$$\sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{(-v)\lambda} \ : \ h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\} = 1,$$

para todos $\varepsilon, \delta > 0$ e $v < 0$.

Se $v < 0$,

$$f^0(0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{v\lambda} v \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

donde segue-se, por propriedade de supremo e de limite, que

$$f^0(0; v) = (-v) \lim_{\varepsilon \to 0, \delta \to 0^+} \left( \sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{(-v)\lambda} \ : \ \begin{array}{c} h \in B_\varepsilon \\ \lambda \in (0, \delta) \end{array} \right\} \right),$$

pois $-v > 0$. De modo análogo a Afirmação 1, mostra-se que

$$\sup \left\{ \frac{f(h + \lambda v) - f(h)}{(-v)\lambda} \ : \ h \in B_\varepsilon, \lambda \in (0, \delta) \right\} = 1,$$

para todos $\varepsilon, \delta > 0$ e $v < 0$. Sendo assim, tem-se

(6) $$f^0(0; v) = -v, \quad v < 0.$$

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (7)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \;\; : \;\; \xi v \leq |v|, \; v \in \mathbb{R}\},$$

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (7)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \ : \ \xi v \leq |v|, \ v \in \mathbb{R}\},$$

logo

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (7)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \ \ : \ \ \xi v \leq |v|, \ v \in \mathbb{R}\},$$

logo

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Para $x < 0$,

$$f^0(x; v) = f'(x)v$$

Combinando (5) e (6), temos

(7) $$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}.$$

De (7)
$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \ \ : \ \ \xi v \leq |v|, \ v \in \mathbb{R}\},$$

logo
$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Para $x < 0$,
$$f^0(x; v) = f'(x)v = -v, \ v \in \mathbb{R},$$

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (7)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \ : \ \xi v \leq |v|, \ v \in \mathbb{R}\},$$

logo

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Para $x < 0$,

$$f^0(x; v) = f'(x)v = -v, \ v \in \mathbb{R},$$

desde que $f$ é de classe $C^1$ em $(-\infty, 0)$,

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (7)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \ \ : \ \ \xi v \leq |v|, \ v \in \mathbb{R}\},$$

logo

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Para $x < 0$,

$$f^0(x; v) = f'(x)v = -v, \ v \in \mathbb{R},$$

desde que $f$ é de classe $C^1$ em $(-\infty, 0)$, e portanto

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^* \ \ : \ \ \langle \xi, v \rangle \leq -v, \ v \in \mathbb{R}\},$$

Combinando (5) e (6), temos

$$f^0(0; v) = |v|, \quad v \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

De (7)

$$\partial f(0) = \{\xi \in \mathbb{R} \ : \ \xi v \leq |v|, \ v \in \mathbb{R}\},$$

logo

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Para $x < 0$,

$$f^0(x; v) = f'(x)v = -v, \ v \in \mathbb{R},$$

desde que $f$ é de classe $C^1$ em $(-\infty, 0)$, e portanto

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^* \ : \ \langle \xi, v \rangle \leq -v, \ v \in \mathbb{R}\},$$

donde segue-se que

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R} \ : \ \xi v \leq -v, \ v \in \mathbb{R}\}.$$

Daí, $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \xi \leq -1, & \text{se } \ v \geq 0; \\ \xi \geq -1, & \text{se } \ v < 0. \end{cases}$$

Daí, $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \xi \leq -1, & \text{se } \ v \geq 0; \\ \xi \geq -1, & \text{se } \ v < 0. \end{cases}$$

Portanto, $\partial f(x) = \{-1\}$.

Daí, $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \xi \leq -1, & \text{se } v \geq 0; \\ \xi \geq -1, & \text{se } v < 0. \end{cases}$$

Portanto, $\partial f(x) = \{-1\}$.
Para $x > 0$ mostra-se de maneira análoga que $\partial f(x) = \{1\}$,

Daí, $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \xi \leq -1, & \text{se } \; v \geq 0; \\ \xi \geq -1, & \text{se } \; v < 0. \end{cases}$$

Portanto, $\partial f(x) = \{-1\}$.
Para $x > 0$ mostra-se de maneira análoga que $\partial f(x) = \{1\}$, mostrando finalmente que

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } \; x > 0; \\ [-1, 1], & \text{se } \; x = 0; \\ \{-1\}, & \text{se } \; x < 0. \end{cases}$$

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$.

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$,

## Lema 1.1

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo.

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$,

## Lema 1.1

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$ tal que

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

## Lema 1.1

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$ tal que

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

Observe que,

$$0 = p(0)$$

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$ tal que

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

Observe que,

$$0 = p(0) = f^0(x; 0)$$

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$ tal que

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

Observe que,

$$0 = p(0) = f^0(x; 0) = f^0(x; v_0 - v_0),$$

## Lema 1.1

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$ tal que

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

Observe que,

$$0 = p(0) = f^0(x; 0) = f^0(x; v_0 - v_0),$$

implicando, de $(A_1)$ que

$$0 \leq f^0(x; v_0) + f^0(x; -v_0)$$

**Lema 1.1**

O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é sempre um conjunto diferente do vazio.

**Demonstração:** Fixe $x \in X$. Assumindo que

$$f^0(x; v) = 0, \text{ para todo } v \in X,$$

temos $\partial f(x) = \{0\}$, e portando não vazio.

Agora, assuma que $f^0(x; v)$ não seja identicamente nulo. Definindo $p \equiv f^0(x; \cdot)$, existe um $v_0 \in X$ tal que

$$f^0(x; v_0) = p(v_0) \neq 0.$$

Observe que,

$$0 = p(0) = f^0(x; 0) = f^0(x; v_0 - v_0),$$

implicando, de $(A_1)$ que

$$0 \leq f^0(x; v_0) + f^0(x; -v_0) = p(v_0) + p(-v_0),$$

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional,

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$.

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

**Afirmação 1.1**: $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y)$, para todo $y \in \langle v_0 \rangle$.

logo

(8) $$-p(v_0) \leq p(-v_0).$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

**Afirmação 1.1**: $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y)$, para todo $y \in \langle v_0 \rangle$.

De fato, pois

$$tp(v_0) = p(tv_0)$$

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

**Afirmação 1.1**: $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y)$, para todo $y \in \langle v_0 \rangle$.

De fato, pois

$$tp(v_0) = p(tv_0) = f^0(x; tv_0), \quad t \geq 0.$$

logo

$$-p(v_0) \leq p(-v_0). \tag{8}$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

**Afirmação 1.1**: $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y)$, para todo $y \in \langle v_0 \rangle$.

De fato, pois

$$tp(v_0) = p(tv_0) = f^0(x; tv_0), \quad t \geq 0.$$

Para $t < 0$, segue de (8) que

$$tp(v_0) = -(-t)f^0(x; v_0)$$

logo

$$(8) \qquad -p(v_0) \leq p(-v_0).$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

**Afirmação 1.1**: $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y)$, para todo $y \in \langle v_0 \rangle$.

De fato, pois

$$tp(v_0) = p(tv_0) = f^0(x; tv_0), \quad t \geq 0.$$

Para $t < 0$, segue de (8) que

$$tp(v_0) = -(-t)f^0(x; v_0) \leq (-t)f^0(x; (-v_0)),$$

logo

$$(8) \qquad -p(v_0) \leq p(-v_0).$$

Por outro lado, seja $\xi : \langle v_0 \rangle \to \mathbb{R}$ um funcional, dado por

$$\langle \xi, y \rangle = tp(v_0),$$

onde $y = tv_0$. Observe que $\xi$ é um funcional linear.

**Afirmação 1.1**: $\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y)$, para todo $y \in \langle v_0 \rangle$.

De fato, pois

$$tp(v_0) = p(tv_0) = f^0(x; tv_0), \quad t \geq 0.$$

Para $t < 0$, segue de (8) que

$$tp(v_0) = -(-t)f^0(x; v_0) \leq (-t)f^0(x; (-v_0)),$$

logo por $(A_1)$, pois $-t > 0$

$$(9) \qquad tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0).$$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$,

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)|$$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)| \leq K(x)\|v\|, \quad v \in X,$$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)| \leq K(x)\|v\|, \quad v \in X,$$

implicando que $F$ é contínua.

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)| \leq K(x)\|v\|, \quad v \in X,$$

implicando que $F$ é contínua. Logo, $F \in X^*$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)| \leq K(x)\|v\|, \quad v \in X,$$

implicando que $F$ é contínua. Logo, $F \in X^*$ donde segue de (10) que $F \in \partial f(x)$

De (9) e $(A_1)$,

$$tp(v_0) \leq f^0(x; tv_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

implicando que

$$\langle \xi, y \rangle \leq f^0(x; y), \quad y \in \langle v_0 \rangle,$$

mostrando assim a Afirmação 1.1.

Da Afirmação 1.1 e de $(A_1)$, segue pelo Teorema de Hahn-Banach que existe um funcional linear $F$ que prolonga $\xi$, isto é

$$\langle F, v \rangle = \langle \xi, v \rangle, \quad v \in \langle v_0 \rangle,$$

e

$$\langle F, v \rangle \leq f^0(x; v), \quad v \in X. \tag{10}$$

Utilizando $(A_3)$

$$\langle F, v \rangle \leq |f^0(x; v)| \leq K(x)\|v\|, \quad v \in X,$$

implicando que $F$ é contínua. Logo, $F \in X^*$ donde segue de (10) que $F \in \partial f(x)$ mostrando que $\partial f(x) \neq \emptyset$, $x \in X$. ■