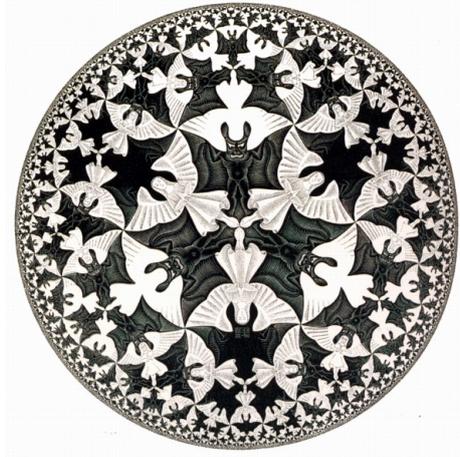


O que é Geometria?

HUGO CATTARUCCI BOTÓS (ICMC-USP)

hugocbotos@gmail.com



1 Resumo

Esse curso se propõe a apresentar de jeito elementar ideias de geometria moderna. Os tópicos centrais que estudaremos são: o terceiro problema de Hilbert, os problemas de bolhas de sabão, a visão de Klein da geometria e ladrilhamentos.

Além disso, o objetivo do curso certamente não é fazer contas (até porque para isso que servem computadores), mas sim entender conceitualmente algumas ideias que permeiam a matemática atual. Em especial, a de simetria, que é fundamental para entender qualquer coisa em matemática e física: da teoria dos números mais refinada à física de partículas.

Também trataremos da famosa geometria hiperbólica, onde as ideias de simetria entram de jeito interessante, misturando números complexos à geometria dos círculos. A descoberta de tal geometria em meados do século XIX foi uma grande quebra de paradigma, pois permitiu aos matemáticos considerarem geometrias mais selvagens, muito além da Euclidiana. Se não fosse o abandono da visão Euclidiana do mundo, dificilmente existiria a matemática necessária ao entendimento de relatividade geral e mecânica quântica. Além disso, geometria hiperbólica tem o hábito de aparecer em tudo que é canto, sendo interessante por si só.

2 Tópicos

Os tópicos apresentados serão escolhidos entre os listados abaixo e certas alterações podem vir a acontecer de acordo com o andar do curso.

1) Apresentar vetores e matrizes geometricamente, explicar determinante como área/volume, aplicar essas ideias para resolver sistemas lineares e calcular área/volume de figuras complicadas como elipses e elipsoides.

2) Provar o teorema de Wallace–Bolyai–Gerwien: Dado dois polígonos P_1 e P_2 de mesma área, é possível cortar P_1 em um número finito de polígonos menores e rearranjá-los formando o outro polígono P_2 . Em essência, esse teorema quer dizer que para calcular a área de qualquer polígono, basta saber duas coisas: usar uma tesoura e calcular área de quadrados. Introduzir o terceiro problema de Hilbert e explicar a solução de Max Dehn.

3) A prova de Steiner da desigualdade isoperimétrica: Entre todas regiões delimitadas por uma curva simples com perímetro fixo, a que tem área máxima é o disco. Problemas de bolhas de sabão.

4) Apresentar números complexos como pontos no plano e relacionar multiplicação com rotações. Introduzir a constante de Euler, relacioná-la às funções trigonométricas, e provar as identidades trigonométricas a partir da identidade de Euler.

5) Introduzir as transformações de Möbius e a geometria dos círculos.

6) A descoberta das geometrias não-Euclidianas: semiplano e disco de Poincaré.

7) Geometria segundo Klein: geometria Euclidiana, geometria esférica e geometria hiperbólica.

8) Característica de Euler, ladrilhamentos e pinturas de Escher.

3 Requisitos

O curso tem por objetivo atingir uma audiência ampla, então suporemos apenas alguma familiaridade com conceitos normalmente vistos no ensino médio tais como:

1) números (naturais, racionais e reais);

2) funções (polinômios, funções seno e cosseno, exponencial);

3) geometria (triângulos, retângulos, círculos, área, volume e o teorema de Pitágoras).

4 Referências

Para as noções de vetores, área/volume e matrizes, recomendo a playlist do 3Blue1Brown sobre álgebra linear no youtube, cujos vídeos possuem legenda e se encontram em:

https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&list=PLZHQ0b0WTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab

Para o tópico 2) seguirei em essência o vídeo do "The Dehn Invariant - Numberphile"(em inglês):

<https://www.youtube.com/watch?v=eYfpSAxGakI>

Para o tópico 3) usarei a prova que se encontra no site "cut the knot"(em inglês):

https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/isoperimetric.shtml

No tópico 4) seguirei a parte inicial desse artigo da Acta Legalicus (em português):

<http://www.cemeai.icmc.usp.br/actalegalicus/uma-prova-celestial-do-teorema-fundamental-da-algebra/>

Para os tópicos 5), 6) e 7), por não serem tópicos usualmente ensinados elementarmente, não seguirei uma referência. No entanto, para dar um gostinho, dê uma olhada nesse vídeo (em português):

<https://www.youtube.com/watch?v=GEUi3wFJzNE>

Com respeito ao tópico 8) têm esse vídeo (em português):

<https://www.youtube.com/watch?v=PfBgpT3MzMM>