Universalidade em sistemas integráveis

Guilherme Lima Ferreira da Silva

Programa:

Você se encontra na fila para embarcar em um ônibus para São Carlos. O motorista distribui os bilhetes com os números dos assentos de maneira aleatória, e você começa a embarcar, pacientemente esperando as pessoas à sua frente colocar suas malas acima dos assentos antes de se sentarem. Qual será o maior tempo que alguém na fila terá que esperar no corredor até que os outros se sentem?

Chegando em São Carlos, você desceu no ponto errado e agora se encontra perdido na UFSCar, mas o que você quer mesmo é chegar na USP. Sem GPS, em cada esquina você joga uma moeda e decide se vira ao sul ou ao leste. Qual é o maior tempo que você pode levar pra chegar à USP? Mas no final das contas você é um matemático, e então ao chegar na USP você cria, como um passatempo inocente, uma matriz na qual cada entrada é uma variável aleatória, e você calcula, só por diversão, seu maior autovalor. Qual a norma desse maior autovalor?

Deixando as liberdades literárias de lado, a resposta para os três problemas acima é, surpreendentemente, a mesma! Basta você colocar as lentes de aumento corretas, e para as três questões você encontrará a mesma distribuição limite, conhecida como distribuição de Tracy-Widom.

Esse fenômeno, onde estatísticas de modelos a princípio completamente distintos podem ser descritas por uma mesma distribuição é chamado de universalidade. Na realidade, muito provavelmente você já encontrou esse conceito na sua graduação: o Teorema do Limite Central em probabilidade diz que a média de variáveis aleatórias independentes, quando apropriadamente escaladas, converge para a mesma distribuição, que é a Gaussiana. Observe que não importa a distribuição inicial das variáveis aleatórias (aqui entra a universalidade), você só precisa rescalar a média apropriadamente (a rescalagem é a escolha das lentes de aumento).

Neste minicurso abordaremos universalidade sob diversas perspectivas. Nosso objeto principal de estudo, mas não único, será o modelo de matrizes gaussianas hermitiano, para o qual diversas distribuições universais emergem de maneira natural. Também abordaremos alguns outros modelos simples, mas mesmo assim muito ricos, em física matemática, para os quais se pode obter resultados altamente não triviais com técnicas de um certo modo clássicas. Naturalmente seremos levados a estudar alguns sistemas integráveis clássicos, como a segunda equação diferencial de Painlevé, a qual surge na descrição da distribuição de Tracy-Widom que mencionamos acima.

O pré-requisito mais necessário é curiosidade matemática, e por muitas vezes comprometeremos rigor técnico para poder enfocar em interpretação e compreensão de resultados. Claro, seria ótimo que você trouxesse para as aulas seu conhecimento de álgebra linear e de análise matemática a nível de graduação, e também um curso de probabilidades básico, ao nível de cálculo, para uma boa compreensão dos modelos e resultados. Ao menos um dentre os cursos de teoria da medida, funções de variável complexa e análise funcional podem auxiliar, mas as idéias necessárias desses cursos serão revistas brevemente à medida que se façam necessárias.

Antecipamos que a primeira aula será muito mais entretenimento do que matemática, focando muito mais na descrição dos tópicos que serão abordados durante o curso de maneira bem informal.

Referências

[1] Jinho Baik, Percy Deift e Toufic Suidan. *Combinatorics and Random Matrix Theory*. Graduate Studies in Mathematics 172. American Mathematical Society, 2016. Oxford University Press, 2011.

[2] Dan Romik. *The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences*. Cambridge University Press, 2015. Versão online disponível gratuitamente *aqui*.

[3] Terence Tao. *Topics in random matrix theory*. Graduate Studies in Mathematics, 132. American Mathematical Society, 2012. Versão preliminar disponível *aqui*.