Universidade Estadual Paulista - Unesp

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Espaço das funções de variação limitada e aplicações a problemas quasilineares elípticos

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Novembro de 2017

Introdução

No estudo de várias equações diferenciais parciais evolutivas e elípticas, os chamados espaços de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, desempenham um papel central na definição de solução fraca e ainda na implementação de métodos variacionais. Esses são formados pelas funções de $L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular, com derivadas distribucionais até ordem m geradas por funções que também pertencem a $L^p(\Omega)$. Esse é o caso de importantes equações como a Equação de Laplace, Poisson, Schrödinger, Dirac, etc. Entretanto, um grande número de problemas na física e no processamento de imagens digitais, requerem a introdução de um espaço de funções que permita a existência de descontinuidades em seus elementos. Como exemplo consideremos o seguinte problema de superfície mínima

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde f é dada. Segue que, ao contrário de equações lineares clássicas, como a Equação de Poisson por exemplo, a qual admite solução para todo $f \in L^2(\Omega)$, a equação (0.1) pode não ter solução dependendo de condições geométricas de $\partial\Omega$.

Essa inconveniente propriedade que determinadas equações tem, cuja existência ou não de soluções depende da geometria do domínio, pode ser eliminada generalizando-se ligeiramente a noção de solução de (0.1). De fato, podemos substituir a condição de fronteira $u = \varphi$, através da introdução de um termo no funcional energia associado, o qual penalize funções que não sejam iguais a φ quase sempre em $\partial\Omega$. Isso nos faz definir o funcional $I : X \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx + \int_{\partial\Omega} |u-\varphi| d\mathcal{H}^{N-1},$$

onde X é o espaço de funções adequado para se tratar (0.1) e $\mathcal{H}^{N-1}$ é a medida de

Hausdorff de dimensão $N-1$. Pela formulação fraca de (0.1), poderíamos pensar que o espaço de funções adequado para se definir I seja $X = W^{1,1}(\Omega)$, entretanto, ocorre que esse funcional não é semicontínuo inferiormente nesse espaço com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$. Isso, por sua vez, torna extremamente difícil provar a existência de mínimos. Há porém um espaço de Banach, o qual contém $W^{1,1}(\Omega)$, onde a devida extensão do funcional I é semicontínuo inferiormente em algum sentido. Esse espaço é o chamado espaço das funções de variação limitada, $BV(\Omega)$, formado pelas funções de $L^1(\Omega)$, para as quais as suas derivadas distribucionais de primeira ordem são geradas por medidas de Radon, isto é

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega);\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

O espaço $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach o qual tem muitas propriedades em comum com os espaços de Sobolev usuais, como resultados de densidade de funções suaves (com respeito a uma topologia adequada), de imersão contínua e compacta em espaços de Lebesgue, existência de traço, etc. Devido a isso e também ao fato de ser esse o espaço adequado para tratar variacionalmente problemas envolvendo operadores muito importantes nas aplicações, como o operador de curvatura média $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$ e o operador $1-$Laplaciano, $\Delta_1 u := \operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$, esse vem sendo cada mais explorado. Em [16] os autores fazem um estudo quase completo do problema de curvatura-média prescrita dado por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.2}$$

considerando diversas geometrias sobre a função f. Dependendo da geometria considerada sobre a função f, os autores recorrem à minimização do funcional de Euler-Lagrange associado a (0.2) sobre o espaço $BV(\Omega)$. Em [12], os autores tratam, entre outros problemas, do problema de autovalor para o operador $1-$Laplaciano. Esse, por ser um operador singular que não está definido sempre que $\nabla u(x) = 0$, apresenta dificuldade adicional a ser contornada.

De fato esses operadores são extremamente importantes nas aplicações. Em reconstrução de imagens digitais, o operador $1-$Laplaciano tem papel proeminente, uma vez que possibilita o emprego de técnicas de reconstrução de imagens que preservam cantos e arestas (ver [5] por exemplo). Está associado ainda a fenômenos de difusão não-linear, uma vez que pode ser visto como um caso particular do operador $p-$Laplaciano, quando $p = 1$. O operador de curvatura média, por sua vez, está presente em diversos problemas clássicos da geometria e por isso vem sendo estudado há ainda mais tempo.

Embora apresente uma estrutura a princípio convidativa para tratar variacionalmente esse tipo de problema, o espaço $BV(\Omega)$ impõe também severas restrições na utilização de alguns métodos. Somente para citar as principais dificuldades, tomando como exemplo o funcional I associado à equação (0.2), dado por

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \lambda \int_\Omega F(x, u)dx,$$

onde $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)dx$, note que este não é diferenciável, embora seja localmente lipschitziano. Assim, para uma correta abordagem variacional, precisamos generalizar a ideia de solução fraca, considerando ao invés dessas, as soluções de variação limitada, dadas por funções $u \in BV(\Omega)$, tais que

$$\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) \geq \lambda \int_\Omega f(x, u)(v - u)dx, \quad \forall v \in BV(\Omega),$$

onde $\mathcal{J}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{\partial\Omega} |u|d\mathcal{H}^{N-1}$. Ocorre que se u é tal como acima, então $0 \in \partial I(u)$, onde $\partial I(u)$ representa o subdiferencial do funcional I. Outra grande dificuldade para o trato de problemas em $BV(\Omega)$, é o fato de esse espaço não ser reflexivo. Isso faz com que não consigamos extrair subsequências convergentes na topologia da norma, ao provarmos que uma certa sequência $(u_n) \subset BV(\Omega)$ é limitada. Isso, por sua vez, torna praticamente impossível a utilização de qualquer resultado minimax que exija a condição de Palais-Smale, uma vez que nesse caso específico, a simples compacidade das imersões de $BV(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ para $p \in (1, N/(N - 1))$, não é suficiente para provar a validade dessa condição.

Nesse texto, pretendemos introduzir esse espaço de funções, bem como apresentar algumas aplicações na busca de soluções de problemas elípticos quasilineares. No primeiro capítulo nós desenvolvemos a teoria básica sobre os espaços BV. Vale a pena ressaltar que serão apresentados aqui somente alguns dentre os muitos resultados da teoria. Um público interessado em problemas que exijam a utilização da Teoria Geométrica da Medida, sem dúvida não encontará aqui um material adequado para esse tipo de estudo. No segundo capítulo procuramos apresentar da forma mais didática possível algumas aplicações dessa teoria para a obtenção de soluções de variação limitada de problemas envolvendo o operador de curvatura média e o $1-$Laplaciano.

Capítulo 1

Espaço das funções de variação limitada

1.1 Definições e propriedades básicas

Nessa seção, Ω será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitziana.

Definição 1.1.1 *Dizemos que uma função $u \in L^1(\Omega)$ é uma função de variação limitada, se sua derivada distribucional Du for gerada por uma medida de Radon, isto é, se $Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Definimos assim o espaço das funções de variação limitada por*

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega);\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$

Observação 1.1.2 *Como $\mathcal{M}(\Omega)$ é igual ao dual topológico de $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ e como $C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ é denso em $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$, segue que os itens abaixo são todos equivalentes:*

- $u \in BV(\Omega)$;
- $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|Du\| := \sup \left\{ \int_\Omega u \, div\varphi \, dx;\ \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |\varphi|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$;
- $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|Du\| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \varphi_i D_i u;\ \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |\varphi|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff, temos ainda que

$$\|Du\| = \int_\Omega |Du|.$$

Claramente o espaço $BV(\Omega)$ é um espaço vetorial, onde de fato podemos definir a seguinte norma:

$$\|u\| := |u|_1 + \|Du\|,$$

para $u \in BV(\Omega)$.

Antes de provarmos que esse espaço é completo com respeito à métrica induzida por essa norma, notemos que, pelo Teorema de Radon-Nikodym, dada $u \in BV(\Omega)$, existem duas medidas, Du^a e Du^s, a primeira absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e a segunda singular com respeito a essa mesma medida, tais que

$$Du = Du^a + Du^s.$$

Dessa observação segue que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço de $BV(\Omega)$ e que de fato a norma $\|\cdot\|$ é uma extensão da norma usual em $W^{1,1}(\Omega)$.

O exemplo abaixo nos mostra que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço próprio de $BV(\Omega)$.

Exemplo 1.1.3 *Seja $E \subset \Omega$ um aberto com fronteira suave e tal que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty$. Note que, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leq 1$, pelo Teorema da Divergência temos*

$$\int_\Omega \chi_E \, div\, \varphi \, dx = \int_E div\, \varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi.\nu \, \mathcal{H}_{N-1} \leq \mathcal{H}_{N-1}(\partial E) < +\infty,$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor normal em $x \in \partial E$, unitário e que aponta para fora de E. Assim, note que $\chi_E \in BV(\Omega)$, porém $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$. De fato $D\chi_E = -\nu \mathcal{H}_{N-1} \lfloor \partial E$, de forma que $D\chi_E$, por consistir em uma medida singular com respeito à de Lebesgue, não é gerada por uma função de $L^1(\Omega)$.

Verifiquemos agora a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.

Lema 1.1.4 *Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada e tal que $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Então $u \in BV(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |Du| \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |Du_n|.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leq 1$ e note que

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u_n \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |Du_n|,$$

onde a primeira igualdade segue uma vez que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Então o resultado segue tomando o supremo sobre todas as tais φ.

■

O resultado anterior nos possibilita provar que $(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.1.5 *$(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |Du_n - Du_m| + |u_n - u_m|_1 < \epsilon, \quad n, m \geq n_0. \tag{1.1}$$

Como (u_n) é também uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, então existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, quando $n \to +\infty$. Então, para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$, como $u_n - u_m \to u - u_m$ quando $n \to +\infty$ em $L^1(\Omega)$, segue do Lema 1.1.4 que

$$\int_\Omega |D(u - u_m)| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |D(u_n - u_m)| < \epsilon.$$

Mas isso implica que $u \in BV(\Omega)$ e ainda que $u_m \to u$ em $BV(\Omega)$, quando $m \to +\infty$.

■

Observe que, segundo a sua definição, o espaço $BV(\Omega)$ não contém $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ como um subconjunto denso com respeito à topologia da norma, haja vista que $\overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|} = W^{1,1}(\Omega)$. Assim, necessitamos introduzir uma noção de convergência que torne $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$, com respeito à topologia induzida. Isso será feito considerando a chamada *convergência intermediária.*

Definição 1.1.6 *Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que $u_n \to u$ em $BV(\Omega)$ segundo a convergência intermediária, se*

$$u_n \to u \quad em\ L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|,$$

quando $n \to +\infty$.

Proposição 1.1.7 *Para todo $u \in BV(\Omega)$, existe $(u_n) \subset C^{\infty}(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que*

$$u_n \to u \quad in\ L^1(\Omega), \tag{1.2}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n| dx \to \int_{\Omega} |Du|. \tag{1.3}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, seja $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| < \epsilon. \tag{1.4}$$

Seja ainda $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos abertos de Ω, tais que $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ e ainda $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_i$. Agora utilizamos a família $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para construir uma cobertura aberta de Ω da seguinte forma. Seja $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dada por, $C_1 = \Omega_2$ e, para $i \geq 2$, $C_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$. Seja $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, isto é, $\varphi_i \in C_c^{\infty}(C_i)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$. Note que isso implica que $\varphi_1 \equiv 1$ em Ω_1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolhamos ρ_i funções regularizantes tais que

$$supp(\rho_i \star (\varphi_i u)) \subset C_i, , \tag{1.5}$$

$$\int_{\Omega} |\rho_i \star (u\varphi_i) - u\varphi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{1.6}$$

$$\int_{\Omega} |\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{1.7}$$

$$\int_{\Omega} |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_1 Du| < \epsilon. \tag{1.8}$$

Definamos então

$$u_\epsilon = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u\varphi_i) \tag{1.9}$$

e observe que essa soma é localmente finita, uma vez que cada $x \in \Omega$ pertence a no máximo dois dentre os conjuntos $\{C_i\}$, e portanto está bem definida. Nota-se claramente ainda que $u_\epsilon \in C^{\infty}(\Omega)$.

Por (1.6), como $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$, note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u - u_\epsilon| dx &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\Omega} |u\varphi_i - \rho_i \star (u\varphi_i)| dx \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que implica em (1.3).

Como $\sum_{i=1}^{+\infty} \nabla\varphi_i \equiv 0$ em Ω, segue que

$$\begin{aligned}
\nabla u_\epsilon &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u\nabla\varphi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} (\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i).
\end{aligned}$$

Então (1.7) e (1.4) implicam que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx \right| &\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \int_\Omega |\rho_i \star (\varphi_i Du)| dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega |\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i| dx \\
&\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \int_\Omega |\varphi_i Du| dx + \epsilon \\
&\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |Du| + \epsilon \\
&< 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Assim (1.8) e a última desigualdade implicam que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |Du| \right| &\leq \left| \int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_\Omega |Du| \right| \\
&< 2\epsilon + \left| \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_\Omega |\varphi_1 Du| \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega |\varphi_1 Du| - \int_\Omega |Du| \right| \\
&< 3\epsilon + \int_\Omega |\varphi_1 - 1||Du| \\
&\leq 3\epsilon + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |Du| \\
&< 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Isso implica que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ e ainda em (1.4), o que termina a prova.

■

Observação 1.1.8 *Modificando ligeiramente a demonstração, tomando funções regularizantes suficientemente próximos de u na norma de $L^p(\Omega)$, poderíamos ainda obter uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, para a qual valesse (1.4) e (1.3) com $L^p(\Omega)$ em lugar de $L^1(\Omega)$, para todo $p \geq 1$ tal que $u \in L^p(\Omega)$.*

Agora vamos utilizar os resultados anteriores para provar resultados de imersão do espaço $BV(\Omega)$ em espaços do tipo $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.1.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira suave (não necessariamente limitado). Então as seguintes imersões são contínuas*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para } p \in [1, 1^*],$$

onde $1^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Demonstração: Dada $u \in BV(\Omega)$, seja $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ uma sequência de funções que convergem para u segundo a convergência intermediária (a qual existe pela Proposição 4.1.3). Observe então que $u_n \in W^{1,1}(\Omega)$ para todo n e assim, dado $p \in [1, 1^*]$, pela imersão contínua de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, segue que

$$|u_n|_p \leq C\left(|u_n|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx\right) < +\infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$, segue que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Pela semicontinuidade inferior de $L^p(\Omega)$ com respeito à sua topologia fraca, segue que

$$|u|_p \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_p \leq \liminf_{n\to\infty} C\left(|u_n|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx\right) = C\|u\|.$$

■

Segue ainda um resultado de imersões compactas de $BV(\Omega)$.

Teorema 1.1.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira suave. Então as imersões abaixo são compactas*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para } p \in [1, 1^*),$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 1.1.8, existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$|v_n - u_n|_p < \frac{1}{n}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n| dx < 2.$$

Note que como (v_n) é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$, então pela compacidade da imersão desse espaço em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 1^*)$, segue que existe uma subsequência (v_{n_k}) e $u \in L^p(\Omega)$, tal que

$$v_{n_k} \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

Mas isso implica que também

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

■

Outra semelhança do espaço $BV(\Omega)$ com relação aos espaços de Sobolev é o fato de que, tal como nos últimos, funções em $BV(\Omega)$ deixam traço em $\partial\Omega$, desde que o domínio seja suave o suficiente. No próximo resultado enunciamos com precisão esse fato, bem como a validade de uma versão generalizada da fórmula de Green.

Teorema 1.1.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ lipschitziana. Então existe um operador linear e contínuo $\gamma : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ tal que:*

i) $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$, para toda $u \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$;

ii) vale a seguinte versão generalizada da fórmula de Green:

$$\int_\Omega \varphi Du = -\int_\Omega u \, div \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\varphi.\nu d\mathcal{H}_{N-1}, \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), \tag{1.10}$$

onde $\nu(x)$ está definido para todo $x \in \partial\Omega$, a menos de um conjunto de medida $\mathcal{H}_{N-1}$ nula, e consiste no vetor normal exterior a Ω em x.

Exemplo 1.1.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira suave. Dada $u \in BV(\Omega)$, defina $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por*

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Então $v \in BV(\mathbb{R}^N)$ e ainda

$$Dv = Du \lfloor \Omega - tr(u)_{\partial\Omega} \nu \mathcal{H}^{N-1} \lfloor \partial\Omega,$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor unitário exterior a Ω, em $x \in \partial\Omega$.

De fato, para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, por (1.10), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi Dv &= -\int_{\mathbb{R}^N} v \, div\varphi \, dx \\ &= -\int_{\Omega} u \, div\varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi Du - \int_{\partial\Omega} tr_{\partial\Omega}(u) \, \nu \, \varphi \, \mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Disso decorre que

$$Dv = Du \lfloor \Omega - tr_{\partial\Omega}(u) \, \nu \, \mathcal{H}^{N-1} \lfloor \partial\Omega,$$

no sentido das distribuições.

Agora vamos enunciar uma importante desigualdade que é amplamente utilizadas quando se trata de espaços de Sobolev e que também é muito importantes quando se trabalha em $BV(\Omega)$.

Teorema 1.1.13 (Desigualdade de Poincaré em $BV(\Omega)$) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira lipschitziana. Então existe uma constante $C = C(N, \Omega) > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right).$$

A demonstração do resultado acima encontra-se em [15][Proposition 2] e não será detalhada por exigir o uso de ferramentas que não serão desenvolvidas nessas notas.

Capítulo 2

Aplicação 1: Operador $1-$Laplaciano em domínio limitado

Nesse capítulo vamos apresentar a primeira e talvez mais simples aplicacação da teoria apresentada no capítulo anterior à solução de problemas elípticos quasilineares. Mais especificamente vamos abordar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde o operador Δ_1 é formalmente dado por $\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira suave, $N \geq 2$ e a não-linearidade f satisfaz o seguinte conjunto de hipóteses:

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(s) = o(1)$ as $s \to 0$;

(f_3) existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $p \in [1, 1^*)$;

(f_4) Existe $\theta > 1$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq f(s)s, \quad \text{for } s \neq 0,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.0.1 *Suponha válidas as hipóteses* $(f_1)-(f_4)$. *Então (0.1) possui uma solução não-trivial.*

Antes de começarmos a abordagem variacional que nos levará a provar o Teorema 2.0.1, é necessário estudarmos com mais cuidado o operador Δ_1, o qual pela sua definição formal não está bem definido em pontos onde $\nabla u = 0$. De fato, como veremos, o funcional energia associado a (0.1) está bem definido em $BV(\Omega)$ e, seus pontos críticos, satisfazem uma versão de (0.1) na qual aparece um campo vetorial que está bem definido e que coincide com $\nabla u/|\nabla u|$ nos pontos onde $\nabla u \neq 0$.

Na primeira seção desse capítulo nós estudaremos o funcional energia associado a (0.1), enquanto na segunda apresentaremos a versão precisa desse problema. Por fim, na terceira, enunciamos e demonstramos uma versão do Teorema do Passo da Montanha adequado ao funcional energia aqui considerado e posteriormente demonstramos o Teorema 2.0.1.

2.1 O funcional energia

Para abordar (0.1) vamos trabalhar no espaço $BV(\Omega)$, porém munido com a seguinte norma

$$\|u\| := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

a qual, pelo Teorema 1.1.13 é equivalente à norma usual de $BV(\Omega)$.

Definamos os seguintes funcionais, $\Phi_0, \Phi_F, \Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ onde para $u \in BV(\Omega)$, temos

$$\Phi_0(u) := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1},$$

$$\Phi_F(u) := \int_\Omega F(u)dx$$

e

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Analisando o funcional Φ é fácil ver que o mesmo não é diferenciável. De fato o funcional Φ_0 não é suave, embora seja lipschitziano e convexo. Uma vez que $\Phi_F \in C^1(BV(\Omega))$, fica claro que devemos nos basear em outra teoria, que não a usual, para definirmos o que se entende por um ponto crítico de Φ. Isto será feito através da teoria de subdiferenciais (ver [13, 4]), a qual desenvolve resultados de análise não-linear para funcionais localmente lipschitzianos. Assim, o que vamos entender por um ponto crítico de Φ é uma função $u \in BV(\Omega)$ tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, o que corresponde, uma vez que Φ_0 é convexo, a $\Phi'_F(u) \in \partial\Phi_0(u)$, o que, por sua vez, é equivalente a

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi'_F(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{1.2}$$

Vamos agora estudar um resultado de [1], no qual são estudadas as propriedades de diferenciabilidade do funcional Φ_0. Como veremos, embora não diferenciável, esse funcional admite derivadas direcionais com respeito a algumas direções. Antes disso, lembremos que para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, denotamos por $\mu = \mu^a + \mu^s$ a decomposição dada pelo Teorema de Radon Nikodyn, onde μ^a e μ^s são, respectivamente, a parte absolutamente contínua e singular, com respeito à medida de Lebesgue $N-$dimensional $\mathcal{L}^N$. Denotamos ainda $|\mu|$, o valor absoluto de μ, dada pela medida de Radon escalar definida em [3][pg. 125]. Por $\dfrac{\mu}{|\mu|}(x)$ denotamos a derivada de Lebesgue de μ com respeito à $|\mu|$, dada por

$$\frac{\mu}{|\mu|}(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{|\mu|(B_r(x))}.$$

Para $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definamos

$$g^0(x,p) = \lim_{t\to 0^+} g\left(x, \frac{p}{t}\right) t.$$

Suponha que g seja diferenciável em p para todo $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N$ e $g^0(x,p)$ seja diferenciável para todo $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e ainda que exista $M > 0$ tal que

$$|g_p(x,p)| \leq M, \quad |g^0_p(x,p)| \leq M.$$

Então $\Phi_g : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\Phi_g(u) = \int_\Omega g(x, Du) := \int_\Omega g(x, (Du)^a(x))dx + \int_\Omega g^0\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)|Du|^s$$

é diferenciável no ponto $u \in BV(\Omega)$ na direção $v \in BV(\Omega)$ se e somente se $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$ e, nesse caso, temos que

$$\Phi'_g(u)v = \int_\Omega g_p(x, (Du)^a(x))(Dv)^a(x)dx + \int_\Omega g^0_p\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|Dv|^s. \tag{1.3}$$

Como

$$\Phi_0(u) = \Phi_g(u) + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1}$$

onde $g(x,p) = |p|$ e $g^0(x,p) = |p|$, temos que, dado $u \in BV(\Omega)$, $\Phi_0'(u)v$ está bem definido para todo $v \in BV(\Omega)$ tal que $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$ e $v(x) = 0$, $\mathcal{H}_{N-1}-$ q.t.p., no conjunto $\{x \in \partial\Omega;\ u(x) = 0\}$. Temos ainda que

$$\Phi_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(Du)^a (Dv)^a}{|(Du)^a|^2} dx + \int_\Omega \frac{Du}{|Du|}(x) \frac{Dv}{|Dv|}(x) |(Dv)|^s + \int_{\partial\Omega} \operatorname{sgn}(u) v d\mathcal{H}_{N-1}. \quad (1.4)$$

Por fim vamos precisar de mais uma propriedade de $BV(\Omega)$, a qual afirma que se $u, v \in BV(\Omega)$, então $\max\{u,v\}, \min\{u,v\} \in BV(\Omega)$ e ainda

$$\Phi_0(\max\{u,v\}) + \Phi_0(\min\{u,v\}) \leq \Phi_0(u) + \Phi_0(v), \quad \forall u, v \in BV(\Omega). \quad (1.5)$$

2.2 A equação de Euler-Lagrange

Nessa seção vamos estudar a versão precisa da equação de Euler-Lagrange associada aos pontos críticos de Φ. Mais especificamente vamos provar que se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então existe um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, o qual faz o papel de $\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ em (0.1) e está bem definido mesmo onde $\nabla u = 0$. Nesse sentido, o primeiro passo é estender os funcional Φ a $L^{1^*}(\Omega)$ e então usar algumas ferramentas de análise convexa.

Consideremos as extensões dos funcionais Φ_0, Φ_F e Φ, dadas respectivamente por $\overline{\Phi_0}, \overline{\Phi_F}, \overline{\Phi} : L^{1^*}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$\overline{\Phi_0}(u) = \begin{cases} \Phi_0(u) & \text{se } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{se } u \in L^{1^*}(\Omega) \backslash BV(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi_F}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) dx$$

e $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_0} - \overline{\Phi_F}$. É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^*}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^*}(\mathbb{R}^N)$. Assim o subdiferencial (como definido por A. Szulkin em [19]) de $\overline{\Phi_0}$, denotado por $\partial\overline{\Phi_0}$, está bem definido. O próximo resultado é crucial para obter a equação de Euler-Lagrange satisfeita pelos pontos críticos de Φ.

Lema 2.2.1 *Se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.*

Demonstração: Suponha que $u \in BV(\Omega)$ seja tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então u satisfaz (1.2). Para $v \in L^{1^*}(\Omega)$, note que:

- se $u \in BV(\Omega) \cap L^{1^*}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= \Phi_0(v) - \Phi_0(u) \\ &\geq \Phi_F'(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega f(u)(v-u)\,dx \\ &= \overline{\Phi_F}'(u)(v-u); \end{aligned}$$

- se $u \in L^{1^*}(\Omega) \backslash BV(\Omega)$, como $\overline{\Phi_0}(v) = +\infty$ e $\overline{\Phi_0}(u) < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{\Phi_F}'(u)(v-u). \end{aligned}$$

Assim, nos dois casos $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.

■

Se $u \in BV(\Omega)$ for uma solução de variação limitada de (0.1), pelo último resultado temos que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Como $\overline{\Phi_0}$ é convexo e $\overline{\Phi_F}$ suave, temos que $\overline{\Phi_F}'(u) \in \partial\overline{\Phi_0}(u)$. Assim, por [12][Proposition 4.23], existe $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|z|_\infty \leq 1$,

$$-\operatorname{div} z = \overline{\Phi_F}'(u) \quad \text{em } L^N(\Omega) \tag{2.6}$$

no sentido das distribuições e

$$\overline{\Phi_0}(u) = -\int_\Omega u \operatorname{div} z\,dx. \tag{2.7}$$

Portanto segue de (2.6) e (2.7) que u satisfaz

$$\begin{cases} \exists\, z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |z|_\infty \leq 1,\ \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ -\displaystyle\int_\Omega u \operatorname{div} z\,dx = \int_\Omega |Du|, \\ -\operatorname{div} z \ = f(x,u), \quad \text{quase sempre em } \Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Logo (2.8) é a versão precisa de (0.1).

2.3 Demonstração do Teorema 2.0.1

Devido ao fato de o operador 1−Laplaciano ter o mesmo grau de homogeneidade tanto no zero quanto no infinito, podemos sem dificuldade provar que o funcional Φ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Porém, o fato de o espaço $BV(\Omega)$ não ser reflexivo torna inviável provar que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale. Assim, faz-se necessário enunciarmos e provarmos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitzianos, o qual não exija a condição de Palais-Smale. Por isso, a seguir enunciamos e provamos tal teorema.

Teorema 2.3.1 *Seja E um espaço de Banach, $\Phi = I_0 - I$ onde $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e I_0 um funcional localmente lipschitziano e convexo definido em E. Suponha que Φ satisfaça:*

i) Existem $\rho > 0$, $\alpha > \Phi(0)$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$,

ii) $\Phi(e) < \Phi(0)$ para algum $e \in E \backslash \overline{B_\rho(0)}$,

Então para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in E$ tal que

$$c - \epsilon < \Phi(x_\epsilon) < c + \epsilon, \tag{3.9}$$

onde $c \geq \alpha$ é caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \tag{3.10}$$

$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(0) = e\}$ e

$$I_0(y) - I_0(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) - \epsilon \|y - x_\epsilon\|, \quad \forall y \in E. \tag{3.11}$$

Antes de iniciar a demonstração do Teorema 2.3.1, vamos provar que a condição (3.11) é equivalente à existência de um $z_\epsilon \in E^*$ tal que $\|z_\epsilon\|_* \leq \epsilon$ e

$$I_0(y) - I_0(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) + \langle z_\epsilon, y - x_\epsilon \rangle_{E^*, E}, \quad \forall y \in E, \tag{3.12}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E^*, E}$ denota o par dualidade entre E e o seu dual.

De fato, claramente (3.12) implica em (3.11). Para provar que (3.11) também implica em (3.12), vamos enunciar um lema provado por Szulkin em [19][Lemma 1.3].

Lema 2.3.2 *Seja E um espaço de Banach e $\chi : E \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e semicontínua inferiormente tal que $\chi(0) = 0$. Se*

$$\chi(x) \geq -\|x\|, \quad \forall x \in E,$$

então existe $z \in E^*$, $\|z\|_* \leq 1$, tal que

$$\chi(x) \geq \langle z, x \rangle_{E^*,E}, \quad \forall x \in E.$$

Agora, se (3.11) vale, então

$$\frac{1}{\epsilon}\left(I_0((y - x_\epsilon) + x_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) - I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon)\right) \geq -\|y - x_\epsilon\|,$$

para todo $y \in E$. Aplicando o Lema 2.3.2 a

$$\chi(x) = \frac{1}{\epsilon}\left(I_0((x + x_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) - I'(x_\epsilon)x\right)$$

segue a existência de um $z \in E^*$, tal que $\|z\|_* \leq 1$ e

$$\chi(x) \geq \langle z, x \rangle_* \quad \forall x \in E.$$

Tomando $z_\epsilon = \epsilon z$ e $x = y - x_\epsilon$ onde $y \in E$, segue (3.12) para z_ϵ and $\|z_\epsilon\|_* \leq \epsilon$.

Para prosseguir com a demonstração, precisamos de uma versão do Lema da Deformação para funcionais localmente lipschitzianos que não necessariamente satisfazem a condição de Palais-Smale, provado em [9][Theorem 4].

Teorema 2.3.3 (Lema da Deformação) *Seja E um espaço de Banach e $T : E \to \mathbb{R}$ um funcional localmente lipschtiziano. Quando $a \in \mathbb{R}$, denotemos $T_a = \{x \in E; T(x) \leq a\}$. Se existir $d \in \mathbb{R}$, $S \subset E$ e $\alpha, \delta, \epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\beta(x) := \min\{\|z\|_{E^*};\, z \in \partial T(x)\} \geq \alpha, \quad \forall x \in T^{-1}([d - \epsilon_0, d + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta},$$

onde $S_{2\delta}$ é uma $2\delta-$vizinhança de S, então para $0 < \epsilon < \min\left\{\frac{\delta\alpha}{2}, \epsilon_0\right\}$, existe um homeomorfismo $\eta : E \to E$ tal que

i) $\eta(x) = x$ *para todo* $x \notin T^{-1}([d - \epsilon_0, d + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$;

ii) $\eta(T_{d+\epsilon} \cap S) \subset T_{d-\epsilon}$*;*

iii) $T(\eta(x)) \leq T(x)$*, para todo* $x \in E$*.*

Demonstração: [Demonstração do Teorema 2.3.3]

Para começar, sob as hipóteses do teorema em questão, vamos recordar o Lemma 3.3 de [4], o qual enuncia a existência de um campo *psudo-gradiente* para T, dado por um campo vetorial localmente lipschitziano $g : T^{-1}([d-\epsilon_0, d+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta} \to E$ satisfazendo

$$\|g(x)\| < 1 \tag{3.13}$$

e

$$\langle z^*, g(x)\rangle_{E^*,E} > \frac{\alpha}{2}, \quad \forall z^* \in \partial T(x). \tag{3.14}$$

Para

$$0 < \epsilon < \min\left\{\frac{\delta\alpha}{2}, \epsilon_0\right\}, \tag{3.15}$$

definamos

$$A = T^{-1}([d-\epsilon_0, d+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]) \cap S_{\delta}$$

e note que $B \subset A$. Seja

$$\psi(x) = \frac{d(x, E\backslash A)}{d(x, E\backslash A) + d(x, B)}$$

e note que ψ é uma função contínua e localmente lipschtziana tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B, \\ 0 & \text{if } x \in E\backslash A. \end{cases}$$

Agora considere $V(x) = \psi(x)g(x)$ a qual é contínua e localmente lipschtziana e ainda $\sigma(t,x)$ solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,x) & = -V(\sigma(t,x)), \quad t > 0, \\ \sigma(0,x) & = x, \end{cases}$$

a qual é contínua em $\mathbb{R}_+ \times E$.

Vamos escolher

$$t_0 \in \left(\frac{2\epsilon}{\alpha}, \delta\right) \tag{3.16}$$

e definir

$$\eta(x) = \sigma(t_0, x), \quad x \in E.$$

Note que como $V \equiv 0$ em $E \backslash (T^{-1}([d-\epsilon_0, d+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$, segue que $i)$ se verifica.

Para provar $ii)$, relembremos a Proposition 9 em [4], a qual implica que $t \mapsto T(\sigma(t,x))$ é diferenciável a menos de um conjunto de medida nula, para cada $x \in E$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}T(\sigma(t,x)) &\leq \max\left\{\left\langle z^*, \tfrac{d}{dt}\sigma(t,x)\right\rangle_{E^*,E};\, z^* \in \partial T(\sigma(x,t))\right\} \\
&= -\min\{\langle z^*, V(\sigma(t,x))\rangle;\, z^* \in \partial T(\sigma(x,t))\} \\
&\leq \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{2} & \text{if } \sigma(t,x) \subset T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]) \cap S_\delta \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde nós usamos (3.14) na última estimativa. Então a função $t \mapsto T(\sigma(t,x))$ é não-crescente, para todo $x \in E$ e assim nós provamos $iii)$.

Note ainda que, para todo $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t,x) - x\| &= \|\sigma(t,x) - \sigma(0,x)\| \\
&= \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}\sigma(s,x)ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|V(\sigma(s,x))\| ds \\
&\leq t.
\end{aligned}$$

Consideremos $x \in T_{d+\epsilon} \cap S$. Se existisse algum $t \in [0, t_0]$ tal que $T(\sigma(t,x)) < d - \epsilon$, então $T(\sigma(t_0,x)) < d - \epsilon$ e $ii)$ seria satisfeito por η. Então suponha que

$$\sigma(t,x) \in T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]), \forall t \in [0, t_0]$$

e vamos provar que $\sigma(t,x) \subset S_\delta$, $\forall t \in [0, t_0]$. De fato, note que

$$\|\sigma(t,x) - x\| \leq t \leq t_0 < \delta, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Assim, como $\sigma([0,t_0], x) \subset T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]) \cap S_\delta$, segue por (3.16) e (3.17) que

$$T(\eta(x)) = T(\sigma(t_0, x))$$

$$
\begin{aligned}
&= T(x) + \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} T(\sigma(s,x))dx \\
&\leq T(x) - \frac{\alpha}{2} t_0 \\
&< d - \epsilon
\end{aligned}
$$

e então $ii)$ se verifica.

■

Agora, finalmente, vamos provar o Teorema 2.3.1.

Demonstração: [Demonstração do Teorema 2.3.1]

Primeiramente note que, como $\Phi(e) < \Phi(0) < \alpha \leq \Phi\big|_{\partial B_\rho}$, então

$$c \geq \alpha.$$

Suponha por contradição que exista $\epsilon > 0$, o qual podemos supor que satisfaça

$$c - \epsilon > \Phi(0),$$

tal que para todo $x \in \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$, onde c é definido em (3.10), (3.11) não valha. Como (3.11) e (3.12) são equivalentes, então para todo $z \in E^*$ tal que $\|z\|_* \leq \epsilon$, existe $y_\epsilon \in X$, tal que

$$I_0(y_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) < I'(x_\epsilon)(y_\epsilon - x_\epsilon)dx + \langle z_\epsilon, y_\epsilon - x_\epsilon\rangle_*.$$

Assim, segue que

$$\beta(x) \geq \epsilon, \quad \forall x \in \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]),$$

onde $\beta(x) = \inf\{\|w^*\|_*;\ w^* \in \partial I_0(u) - I'(x)\}$.

Pelo Teorema 2.3.3 aplicado a $T = \Phi$, $d = c$, $\alpha = \epsilon$ e $\epsilon_0 = \epsilon$ segue que existe um homeomorfismo $\eta : E \to E$ e $\bar{\epsilon} \in (0, \epsilon)$ tais que

i) $\eta(x) = x$ para todo $x \notin \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$;

ii) $\eta(\Phi_{c+\bar{\epsilon}}) \subset \Phi_{c-\bar{\epsilon}}$.

Pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \leq c + \bar{\epsilon}.$$

Vamos considerar $\tilde{\gamma}(t) = \eta(\gamma(t))$ e note que, como $\Phi(0), \Phi(e) < c - \epsilon$, $i)$ implica que $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Então, $ii)$ implica que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi(\tilde{\gamma}(t)) \leq c - \overline{\epsilon},$$

o que é uma contradição e assim o resultado segue.

$\blacksquare$

Munidos desse importante resultado minimax, mostremos que o funcional Φ satisfaz as hipóteses da versão do Teorema do Passo da Montanha aqui demonstrado.

Primeiramente mostremos que o funcional Φ satisfaz a condição $i)$. Antes, note que por (f_2) e (f_3), segue que para todo $\eta > 0$, existe $A_\eta > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq \eta|s| + A_\eta|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Por (3.18) e pelo Teorema 1.1.9, segue que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx \\ &\geq \|u\| - \eta|u|_1 - A_\eta|u|_p^p \\ &\geq \|u\| - C\eta\|u\| - CA_\eta\|u\|^p \\ &= (1 - C\eta)\|u\| - C_1\|u\|^p \\ &\geq \alpha, \end{aligned}$$

para toda $u \in BV(\Omega)$, tal que $\|u\| = \rho$, onde $0 < \eta < 1/C$ é fixado e $0 < \rho < \left(\dfrac{1 - C\eta}{C_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ e $\alpha = \rho(1 - C\eta - C_1\rho^{p-1})$.

Agora vamos provar que Φ satisfaz a condição $ii)$ do Teorema 2.3.1. Note primeiramente que a condição (f_4) implica que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq d_1|s|^\theta - d_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Se $u \in BV(\Omega)\backslash\{0\}$, dado $t > 0$, temos

$$\Phi(tu) \leq t\|u\| - d_1 t^\theta \int_\Omega |u|^\theta dx + d_2|\Omega| \to -\infty,$$

quando $t \to +\infty$, já que $\theta > 1$.

Então o Teorema 2.3.1 nos garante a existência de sequências $(u_n) \subset BV(\Omega)$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\Phi_n(u_n) \to c, \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_n) \geq \int_\Omega f(u_n)(v - u_n)dx - \epsilon_n \|v - u_n\|, \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{3.20}$$

Mostremos agora que a sequência (u_n) é limitada em $BV(\Omega)$. Em (3.20), escolhamos a função teste $v = 2u_n$ e obtemos

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1 + \epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{3.21}$$

Então, por (f_4) e (3.21), note que

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &\geq \Phi(u_n) \\
&= \|u_n\| + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx - \int_\Omega \frac{1}{\theta} f(u_n)u_n dx \\
&\geq \|u_n\| \left(1 - \frac{1}{\theta} + \frac{\epsilon_n}{\theta}\right) \\
&\geq C\|u_n\|,
\end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_n) é limitada.

Pela limitação de (u_n) em $BV(\Omega)$ e pela compacidade das imersões do Teorema 1.1.10, segue que existe $u \in L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ para $1 \leq r < 1^*$. Ainda, pelo Lema 1.1.4 segue que $u \in BV(\Omega)$. Assim, calculando o lim sup ambos os lados de (3.20) e usando novamente o Lema 1.1.4 temos que

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \int_\Omega f(u)(v - u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{3.22}$$

Portanto u é solução de variação limitada de (0.1).

Para verificarmos que $u \neq 0$, note que, considerando $v = u + tu$ para $t > 0$ em (3.22), obtemos

$$\frac{\Phi_0(u + tu) - \Phi_0(u)}{t} \geq \int_\Omega f(u)udx.$$

Fazendo $t \to 0^+$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \geq \int_\Omega f(u)udx.$$

Usando o mesmo argumento para $t < 0$ e fazendo $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \leq \int_\Omega f(u)udx.$$

Então, pelas últimas desigualdades e por (1.4), temos que

$$\Phi_0(u) = \Phi_0'(u)u = \int_\Omega f(u)udx. \tag{3.23}$$

Utilizando a mesma argumentação com $v = u_n + tu_n$ em (3.20), para $t > 0$ e $t < 0$ e fazendo $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0(u_n) = \Phi_0'(u_n)u_n = \int_\Omega f(u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{3.24}$$

Portanto, de (3.23), (3.24), (f_2), (f_3) e o Teorema 1.1.10, segue que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= \int_\Omega f(u)udx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n)u_n dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi_0(u_n). \end{aligned}$$

Logo, a última igualdade, (f_2), (f_3) e o Teorema 1.1.10, implicam que

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u)$$

e assim $u \neq 0$.

■

Capítulo 3

Aplicação 2: Operador 1-Laplaciano no $\mathbb{R}^N$

Nesse capítulo vamos abordar questões envolvendo a existência de solução não-trivial para problemas no $\mathbb{R}^N$, envolvendo o operador $1-$Laplaciano. De fato desejamos encontrar solução radial de energia mínima entre essas e, para isso, será necessário desenvolver, tal como em [8], argumentos baseados na minimização do funcional energia em conjuntos do tipo *Nehari*. Mais especificamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u + \dfrac{u}{|u|} & = f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ & u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $N \geq 2$ e f é uma não-linearidade satisfazendo as seguintes condições

(f_1) $f \in C(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(s) = o(1)$ quando $s \to 0$;

(f_3) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $p \in (1, 1^*)$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2 |s|^{p-1};$$

(f_4) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{F(t)}{t}$, onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$;

(f_5) f é crescente.

Nosso intuito é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.0.1 *Suponha válidas as hipóteses* $(f_1)-(f_5)$*. Então existe uma solução radial não trivial de (0.1) com a menor energia entre as soluções radiais de variação limitada.*

Definamos os seguintes funcionais, $\Phi_0, \Phi_F, \Phi : BV(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ onde, para $u \in BV(\Omega)$, temos

$$\Phi_0(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u|dx,$$

$$\Phi_F(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$$

e

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Assim como no capítulo anterior, o funcional Φ não é diferenciável, mas sim localmente lipschitziano. Uma vez que $\Phi_F \in C^1(BV(\Omega))$, diremos que um ponto crítico de Φ é uma função $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, o que corresponde, uma vez que Φ_0 é convexo, a $\Phi_F'(u) \in \partial\Phi_0(u)$. Mas isso é equivalente a

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\mathbb{R}^N). \tag{0.2}$$

Com uma ligeira modificação do argumento usado na Seção 2.2 do Capítulo 2, é possível mostrar que uma função $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ que seja ponto crítico de Φ, satisfaz uma versão de (0.1) onde Δ_1 é substituído pelo divergente de um campo vetorial z que faz o papel de $\nabla u/|\nabla u|$ e a expressão $u/|u|$ é substituída por uma função bem definida em $\mathbb{R}^N$, a qual coincide com $u(x)/|u(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(x) \neq 0$.

Como dito no início do capítulo, para encontrar solução de energia mínima vamos desenvolver argumentos baseados em um conjunto do tipo *Nehari*. Essa abordagem foi pioneiramente desenvolvida em [8] e se baseia principalmente no seguintes resultados abstratos.

Teorema 3.0.2 *Sejam* E, F *espaços de Banach,* E *não necessariamente reflexivo, compactamente imerso em* F *e tal que, para toda sequência limitada* $(u_n) \subset E$ *com* $u_n \to u$ *na topologia de* F*, vale que* $u \in E$*. Seja* $\Phi, I_0 : E \to \mathbb{R}$*,* $I : F \to \mathbb{R}$ *funcionais tais que*

$\Phi = I_0 - I|_E$, onde I_0 é localmente lipschitziano, $I \in C^1(E) \cap C^0(F)$, $I(0) = 0$ e, para todo $u \in E$, existe o seguinte limite

$$I_0'(su)u := \lim_{t \to 0} \frac{I_0(su + tu) - I_0(su)}{t}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Suponha ainda que as seguintes hipóteses se verifiquem:

i) *I_0 é semicontínuo inferiormente com respeito à topologia de F, isto é, se (u_n) for limitada em E e $u \in E$ for tal que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ na topologia de F, então $I_0(u) \leq \liminf_{n \to \infty} I_0(u_n)$;*

ii) *Existem $\rho, \alpha_0 > 0$, tais que $\Phi(u) \geq \alpha_0 > \Phi(0)$, para todo $u \in E$ com $\|u\| = \rho$;*

iii) *$\forall u \in E$, $\Phi(u) \geq \|u\| - I(u)$;*

iv) *$t \mapsto \Phi'(tu)u$ é decrescente em $(0, +\infty)$;*

v) *Para toda sequência limitada $(v_n) \subset E$ tal que $v_n \to v \neq 0$ na topologia de F, segue que*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi(tv_n)}{t} = -\infty, \quad \textit{uniformemente para } n \in \mathbb{N}.$$

Então o ínfimo de Φ no seguinte conjunto

$$\mathcal{N} := \{u \in E \backslash \{0\};\ I_0'(u)u = I'(u)u\}$$

é atingido.

Teorema 3.0.3 *Suponha todas as hipóteses do Teorema 3.0.2 verdadeiras. Se $u_0 \in \mathcal{N}$ for tal que $\Phi(u_0) = \min_{\mathcal{N}} \Phi$, então u_0 é um ponto crítico de Φ em E.*

Vamos aplicar os dois resultados acima para o funcional $\Phi = \Phi_0 - \Phi_F$, com $E = BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $F = L^p(\mathbb{R}^N)$, para p tal como em (f_3), onde

$$BV_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{u \in BV(\mathbb{R}^N);\ u(x) = u(|x|)\}.$$

Caso sejamos capazes de verificar todas as hipóteses dos Teoremas 3.0.2 e 3.0.3, teremos obtido um ponto crítico de Φ quando restrito à $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Este, por uma versão do

Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais provado em [18], será um ponto crítico de Φ em $BV(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, uma solução de variação limitada de (0.1).

Para obtermos a compacidade da imersão de $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, tal como requerido no Teorema 3.0.2, é necessário introduzirmos resultados provados em [9], que consistem em versões em $BV(\mathbb{R}^N)$ de resultados bem conhecidos para espaços de Sobolev usuais. Mais especificamente, em [9][Theorem 1.1] é provado que a imersão $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ é compacta, para todo $1 < q < 1^*$. A demonstração baseia-se em uma versão em $BV(\mathbb{R}^N)$ do conhecido Lema de Strauss, o qual também é demonstrado em [9].

Consideremos então

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N);\ \Phi_0'(u)u = \Phi_F'(u)u\} \\ &= \left\{u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u|dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right\}. \end{aligned}$$

No próximo resultado nós provamos que todos os pontos críticos de Φ restrito ao espaço $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ pertencem a $\mathcal{N}$. Assim, se provarmos que o ínfimo de Φ em $\mathcal{N}$ é atingido, pelo Teorema 3.0.3 este será um ponto crítico e terá a menor energia entre todas as soluções radiais e não-triviais.

Lema 3.0.4 *Se $u_0 \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \neq 0$ e $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então $u \in \mathcal{N}$.*

Demonstração: Se $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_0) \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)(v - u_0)dx, \quad \forall v \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Para $t > 0$, tomando $v = u_0 + tu_0$ na última expressão e calculando o limite quando $t \to 0^+$, obtemos

$$\Phi_0(u_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi_0(u_0 + tu_0) - \Phi_0(u_0)}{t} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)u_0 dx.$$

Fazendo o mesmo para $t \to 0^-$, obtemos

$$\Phi_0(u_0) = \lim_{t \to 0^-} \frac{\Phi_0(u_0 + tu_0) - \Phi_0(u_0)}{t} \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)u_0 dx,$$

de onde segue a igualdade em ambas as expressões acima. Assim $u_0 \in \mathcal{N}$.

$\blacksquare$

Verifiquemos então que as condições do Teorema 3.0.2 são satisfeitas. Note que

$$\begin{aligned}
\Phi_0'(su)u &= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_0(su+tu)-\Phi_0(su)}{t}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{(D(su))^a(Du)^a}{|(D(su))^a|}dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{D(su)}{|D(su)|}(x)\frac{Du}{|Du|}(x)|Du|^s + \int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{sgn}(su)udx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|(Du)^a|dx + \int_{\mathbb{R}^N}|(Du)^s| + \int_{\mathbb{R}^N}|u|dx
\end{aligned}$$

É fácil ver que I_0 satisfaz $i)$.

Para $ii)$, observe que por (f_2) e (f_3), para todo $\epsilon > 0$, existe C_ϵ tal que

$$|F(s)| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^p, \quad \text{para todo } s\in\mathbb{R}. \tag{0.3}$$

Então, pelas imersões de $BV(\mathbb{R}^N)$ e (0.3), temos que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\geq (1-C\epsilon)\|u\| - CC_\epsilon\|u\|^p\\
&= \|u\|(1-C\epsilon-CC_\epsilon\|u\|^{p-1})\\
&= \rho(1-C\epsilon-CC_\epsilon\rho^{p-1}) =: \alpha_0 > 0 = \Phi(0),
\end{aligned}$$

onde $\|u\| = \rho$ e $\epsilon, \rho > 0$ são pequenos o suficiente.

Pela definição de Φ segue que $iii)$ vale, uma vez que a igualdade se verifica.

Para verificar $iv)$, note que

$$t \mapsto \Phi_F'(tu)u = \int_{\mathbb{R}^N} f(tu)udx$$

é crescente em $(0,+\infty)$ por (f_5). Levando em conta o fato de que $t\mapsto \Phi_0'(tu)u = \Phi_0(u)$ é constante, segue que $t \mapsto \Phi'(tu)u$ é uma função decrescente em $(0,+\infty)$.

Finalmente, para verificar $v)$, seja $(v_n)\subset BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $v\in L^p(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $v_n \to v$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como $\Phi(u) = \|u\| - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$, é suficiente provar que

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(tv_n)}{t} = +\infty \quad \text{uniformemente } n\in\mathbb{N}.$$

Seja $\Gamma = \{x\in\mathbb{R}^N;\, v(x)\neq 0\}$ e note que $|\Gamma| > 0$. Pelo Lema de Fatou, segue que, para todo $t > 0$,

$$\int_\Gamma \frac{F(tv)}{t}dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(tv_n)}{t}dx.$$

Assim, por (f_4) temos que

$$\liminf_{t\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(tv_n)}{t}dx \geq \liminf_{t\to\infty}\int_\Gamma\frac{F(tv)}{t}dx = +\infty.$$

Então, para todo $M > 0$, existe $t_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(tv_n)}{t} dx \geq M, \quad \text{para todo } t > t_0 \text{ e } n \geq n_0,$$

o que prova v).

Portanto, uma vez que todas as hipóteses do Teorema 3.0.2 estão satisfeitas, segue a existência de $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v).$$

Assim, pelo Teorema 3.0.3 e por [18], segue que u_0 é um ponto crítico de Φ e então, uma solução radial de variação limitada de (0.1), a qual possui a menor energia entre as radiais.

Capítulo 4

Aplicação 3: Operador 1-biharmônico

Nesse capítulo vamos estudar um resultado de existência de solução não trivial para o seguinte problema quasilinear elíptico envolvendo o operador $1-$biharmônico,

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = \dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. O operador $1-$biharmônico é definido por

$$\Delta_1^2 u = \Delta\left(\frac{\Delta u}{|\Delta u|}\right),$$

e pode ser visto como o caso $p = 1$ para o operador $p-$biharmônico $\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$, este último muito utilizado no estudo de sistemas de equações de segunda ordem. De fato, a definição precisa de Δ_1^2 será dada na Seção 4.1.2.

Consideraremos uma não-linearidade do tipo "sublinear"com respeito ao nosso operador. Mais especificamente, consideramos as seguintes hipóteses sobre f.

(f_1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, i.e. $f(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$ e $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$;

(f_2) Existem $0 < q < 1$, $c_1 > 0$ e uma função $c_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1|s|^{q-1} + c_2(x) \quad \text{para quase todo } x \in \Omega \text{ e para todo } s \in \mathbb{R};$$

(f_3) $F(x,t) \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}$ e existe $t_0 > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega F(x,t_0)\,dx > 0$.

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.0.1 *Suponha que f satisfaça (f_1), (f_2) e (f_3). Então existe $\lambda_* > 0$ tal que (0.1) possui uma solução não-trivial para todo $\lambda \geq \lambda_*$.*

A prova desse resultado seguirá da aplicação de argumentos de minimização global do funcional energia a ele associado. Entretanto, antes de proceder com esses argumentos, é necessário estudarmos o espaço adequado para se tratar variacionalmente tal problema, o que será feito na seção a seguir.

4.1 O espaço $BL_0(\Omega)$

Denotemos por $BL_0(\Omega)$ o espaço das funções de $W_0^{1,1}(\Omega)$ tais que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, ou seja

$$BL_0(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)\right\}$$

onde relembramos que $\mathcal{M}(\Omega)$ é o espaço das medidas de Radon em Ω.

Como provado em [17][Proposition 2.2.], temos que

$$BL_0(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\Delta u| < +\infty\right\}$$

onde

$$\int_\Omega |\Delta u| := \sup\left\{\int_\Omega u\,\Delta\,\varphi\,dx : \varphi \in C_c^2(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}$$

é definida como a variação total da medida Δu.

Definindo $W_\Delta^{2,1}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,1}(\Omega);\ \Delta u \in L^1(\Omega)\}$, note que

$$W_\Delta^{2,1}(\Omega) \subset BL_0(\Omega)$$

e ainda, para todo $u \in BL_0(\Omega)$ tal que $u \in W_\Delta^{2,1}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\Delta u| = |\Delta u|_1.$$

Aqui, uma peculiaridade do espaço $BL_0(\Omega)$ há que ser ressaltada. Observe que, denotando por $W_\Delta^{2,2}(\Omega) := \{u \in W_0^{2,1}(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, por [20][Lemma 8.17] segue que

$W^{2,2}_{\Delta}(\Omega) = H^2 \cap H^1_0(\Omega)$, isto é, se $u \in H^1_0(\Omega)$ for tal que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, então isso significa que todas as derivadas fracas de segunda ordem pertencem a $L^2(\Omega)$. Quando se trabalha com subespaços de $L^1(\Omega)$, isso não mais é verdadeiro, isto é, para uma função $u \in W^{1,1}_0(\Omega)$, apenas com a informação de que $\Delta u \in L^1(\Omega)$, se $N \geq 2$, não se pode afirmar que todas as derivadas fracas de segunda ordem são distribuições representadas por funções de $L^1(\Omega)$ (conforme [6]).

Vamos munir o espaço $BL_0(\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_0 = |u|_1 + |\nabla u|_1 + \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para } u \in BL_0(\Omega).$$

O espaço $BL_0(\Omega)$, como veremos, compartilha muitas propriedades em comum com o espaço $BV(\Omega)$. Essas serão expostas nos próximos lemas, cujas demonstrações serão suprimidas por serem absolutamente análogas às respectivas para o espaço $BV(\Omega)$. O leitor interessado em tais demonstrações pode encontra-las em [17, 2].

Lema 4.1.1 *Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$, com $1 \leq r \leq N/(N-2)$. Então $u \in BL_0(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |\Delta u| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\Delta u_n|. \tag{1.2}$$

Pode-se ainda provar que o espaço $(BL_0(\Omega), \|\cdot\|_0)$ é um espaço de Banach.

Assim como o espaço $BV(\Omega)$, na topologia da norma de $BL_0(\Omega)$ o conjunto das funções $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ não constituem um conjunto denso. Porém, aqui também há uma topologia segundo a qual essa densidade de fato se verifica. Para isso necessitamos introduzir a seguinte noção de convergência.

Definição 4.1.2 *Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ converge estritamente para $u \in BL_0(\Omega)$ se*

- *$u_n \to u$ in $W^{1,1}_0(\Omega)$ quando $n \to +\infty$,*
- *$\int_\Omega |\Delta u_n| \to \int_\Omega |\Delta u|$ quando $n \to +\infty$.*

A seguir enunciamos a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ em $BL_0(\Omega)$ com respeito à noção de convergência introduzida acima.

Proposição 4.1.3 *Para todo $u \in BL_0(\Omega)$ existe uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ tal que*

$$u_n \to u \quad \textit{in } W_0^{1,1}(\Omega) \textit{ quando } n \to +\infty \tag{1.3}$$

e

$$\int_\Omega |\Delta u_n| dx \to \int_\Omega |\Delta u| \quad \textit{quando } n \to +\infty. \tag{1.4}$$

Como veremos a seguir, as imersões de Sobolev também valem para esse espaço.

Proposição 4.1.4 *A imersão*

$$BL_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua para todo $p \in [1, 1^{**}]$, onde $1^{**} := N/(N-2)$. Mais precisamente, existe uma constante $C := C(\Omega, p, N) > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_0 \quad \textit{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Além disso, a imersão

$$BL_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta para todo $p \in [1, 1^{**})$.

No problema específico que vamos tratar, seria interessante que $u \mapsto \int_\Omega |\Delta u|$ definisse uma norma em $BL_0(\Omega)$ equivalente a $\| \cdot \|_0$. Mostraremos que de fato isso acontece a seguir.

Por (1.1.13) e os resultados em [**?**][Theorem 1.2 and Proposition 2.1] de Brézis e Ponce, podemos definir em $BL_0(\Omega)$ a seguinte norma

$$\|u\| = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega)$$

a qual é equivalente a $\| \cdot \|_0$. De fato, se $u \in BL_0(\Omega)$, note que, como $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, então $\int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u| dx$. Assim, por (1.1.13), segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq (C+1)\|\nabla u\|_1 + \int_\Omega |\Delta u| \\ &\leq C_1 \int_\Omega |\Delta u|. \end{aligned}$$

4.1.1 O funcional energia

Nessa seção vamos definir o funcional energia em $BL_0(\Omega)$, cuja equação de Euler-Lagrange (pelo menos em sua versão não-precisa ou formal) é dada por (0.1). Seja $\Phi : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\Delta u| - \int_\Omega F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Vamos introduzir ainda os funcionais $\Phi_0 : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $\Phi_F : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega)$$

e

$$\Phi_F(u) = \int_\Omega \lambda F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega),$$

de forma que

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) - \Phi_F(u) \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Embora não seja $C^1(BL_0(\Omega), \mathbb{R})$, observe que o funcional Φ_0 é convexo e lipschitziano e de fato admite derivadas direcionais em algumas direções. De fato, como mostrado por Anzellotti em [1], dado $u \in BL_0(\Omega)$, para todo $v \in BL_0(\Omega)$ tal que $(\Delta v)^s$ seja uma medida absolutamente contínua com respeito a $(\Delta u)^s$, temos que

$$\Phi_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(\Delta u)^a (\Delta v)^a}{|(\Delta u)^a|}\,dx + \int_\Omega \frac{\Delta u}{|\Delta u|}(x)\frac{\Delta v}{|\Delta v|}(x)|(\Delta v)^s|. \tag{1.5}$$

Uma vez que estamos tratando de um funcional que se escreve como a diferença entre um convexo e lipschitziano, Φ_0 e um $C^1(BL_0(\Omega), \mathbb{R})$, Φ_F, usaremos novamente a teoria de subdiferenciais de K. Chang [4] e F. Clarke [13] para definir o que entendemos por uma solução de (0.1). Diremos que $u \in BL_0(\Omega)$ é uma *solução de variação limitada* de (0.1) se $0 \in \partial\Phi(u)$, i.e., se $\Phi_F'(u) \in \partial\Phi_0(u)$ onde $\partial\Phi_0(u)$ denota o subdiferencial de Φ_0 em u. Devido à convexidade de Φ_0, isso pode ser expresso através de

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u) \quad \text{para todo} v \in BL_0(\Omega). \tag{1.6}$$

4.1.2 A equação de Euler-Lagrange

Nessa seção vamos estudar a versão precisa da equação de Euler-Lagrange satisfeita por pontos críticos de Φ. Mais especificamente vamos provar que se $u \in BL_0(\Omega)$ for tal que

$0 \in \partial\Phi(u)$, então existe um campo vetorial $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, o qual faz o papel de $\dfrac{\Delta u}{|\Delta u|}$ em (0.1) e está bem definido mesmo onde $\Delta u = 0$. Para isso, será necessário estender os funcional Φ a $L^{1^{**}}(\Omega)$ e então usar algumas ferramentas de análise convexa.

Consideremos as extensões dos funcionais Φ_0, Φ_F e Φ, dadas respectivamente por $\overline{\Phi_0}, \overline{\Phi_F}, \overline{\Phi} : L^{1^{**}}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$\overline{\Phi_0}(u) = \begin{cases} \Phi_0(u) & \text{se } u \in BL_0(\Omega), \\ +\infty & \text{se } u \in L^{1^{**}}(\Omega) \backslash BL_0(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi_F}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda F(x,u)dx$$

e $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_0} - \overline{\Phi_F}$. É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^{**}}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^{**}}(\mathbb{R}^N)$. Assim o subdiferencial (como definido por A. Szulkin em [19]) de $\overline{\Phi_0}$, denotado por $\partial\overline{\Phi_0}$, está bem definido. O próximo resultado é crucial para obter a equação de Euler-Lagrange satisfeita pelos pontos críticos de Φ.

Lema 4.1.5 *Se $u \in BL_0(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.*

Demonstração: Suponha que $u \in BL_0(\Omega)$ seja tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então u satisfaz (1.6). Para $v \in L^{1^{**}}(\Omega)$, note que:

- se $u \in BL_0(\Omega) \cap L^{1^{**}}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= \Phi_0(v) - \Phi_0(u) \\ &\geq \Phi_F'(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega \lambda f(u)(v-u)\,dx \\ &= \overline{\Phi_F}'(u)(v-u); \end{aligned}$$

- se $u \in L^{1^{**}}(\Omega) \backslash BL_0(\Omega)$, como $\overline{\Phi_0}(v) = +\infty$ e $\overline{\Phi_0}(u) < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{\Phi_F}'(u)(v-u). \end{aligned}$$

Assim, nos dois casos $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.

■

Se $u \in BL_0(\Omega)$ for uma solução de variação limitada de (**??**), pelo último resultado temos que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Como $\overline{\Phi_0}$ é convexo e $\overline{\Phi_F}$ suave, temos que $\overline{\Phi_F}\,'(u) \in \partial\overline{\Phi_0}(u)$. Como mostrado em [17, Proposition 5.2], existe $z^* \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\|z^*\|_\infty \leq 1$,

$$\Delta z^* = \overline{\Phi_F}\,'(u) \quad \text{em } L^N(\Omega) \tag{1.7}$$

no sentido das distribuições e

$$\overline{\Phi_0}(u) = \int_\Omega u \Delta z^* \, dx. \tag{1.8}$$

Portanto segue de (1.7) e (1.8) que u satisfaz

$$\begin{cases} \exists\, z^* \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \ \|z^*\|_\infty \leq 1, \ \Delta z^* \in L^N(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega u \Delta z^* dx = \int_\Omega |\Delta u|, \\ \Delta z^* = \lambda f(x,u), \quad \text{quase sempre em } \Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Logo (1.9) é a versão precisa de (0.1).

Observação 4.1.6 *Observe que a condição de fronteira* $\dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *está contemplada na definição de* z^**, uma vez que* $z^* \in W_0^{1,1}(\Omega)$ *implica que* $z^* = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *no sentido do traço.*

4.2 Demonstração do Teorema 4.0.1

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$. Por (f_2), pela Desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.1.4, segue que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \|u\| - c_1\lambda \int_\Omega |u|^q \, dx - \lambda \int_\Omega c_2(x) \, dx \\ &\geq \|u\| - C|u|_1^q - C \\ &\geq \|u\| - C\|u\|^q - C, \end{aligned}$$

implicando que Φ é coercivo e também limitado inferiormente.

Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência minimizante para Φ, isto é, $\Phi(u_n) \to \beta$, onde $\beta = \inf\limits_{BL_0(\Omega)} \Phi$. A coercividade de Φ implica que (u_n) é limitado em $BL_0(\Omega)$. Então, pela Proposição 4.1.4, temos que, a menos de subsequência, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$

em $L^1(\Omega)$. Pelo Lema 4.1.1, segue que $u \in BL_0(\Omega)$ e ainda que (1.2) vale. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_\Omega |\Delta u| - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\Delta u_n| - \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx \\ &= \beta, \end{aligned}$$

de onde segue que $\Phi(u) = \beta$ e então u é um minimizante global. Agora vamos mostrar que u é uma solução de variação limitada de (0.1). Para todo $v \in BL_0(\Omega)$ e $t > 0$, note que pela convexidade de Φ_0, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) - \Phi_F(u) &\leq \Phi_0((1-t)u + tv) - \Phi_F((1-t)u + tv) \\ &\leq (1-t)\Phi_0(u) + t\Phi_0(v) - \Phi_F((1-t)u + tv). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \Phi_0(v) - \Phi_0(u) &\geq \frac{1}{t}\left(\Phi_F(t(v-u)+u) - \Phi_F(u)\right) \\ &\geq \int_0^1 \Phi_F'(u + st(v-u))ds(v-u). \end{aligned}$$

Fazendo $t \to 0^+$ temos que u satisfaz (1.6).

Somente nos resta provar que u é uma solução não-trivial de (0.1). Esse é o único ponto onde a condição (f_3) será utilizada. Vamos considerar $x_0 \subset \Omega$ e $r, \delta > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \overline{B_{r+\delta}(x_0)} \subset \Omega$. Definamos $w : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{r+\delta}(x_0), \\ t_0 & \text{se } x \in B_r(x_0), \\ \dfrac{t_0}{\delta}(r + \delta - |x - x_0|) & \text{se } x \in B_{r+\delta}(x_0) \backslash B_r(x_0). \end{cases}$$

Observe que $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e, no sentido das distribuições

$$\Delta w \;=\; -\frac{t_0}{\delta}\frac{(N-1)}{|x-x_0|}\chi_{B_{r+\delta}(x_0)\backslash B_r(x_0)} + \frac{t_0}{\delta}\,\mathcal{H}_{N-1}|_{\partial B_{r+\delta}(x_0)} - \frac{t_0}{\delta}\,\mathcal{H}_{N-1}|_{\partial B_r(x_0)} \in \mathcal{M}(\Omega).$$

Então,

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_\Omega F(x,w)\,dx \\ &\leq \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)\,dx, \end{aligned}$$

o que, levando-se em conta (f_3), é negativo para $\lambda \geq \lambda^*$ onde λ^* é grande o suficiente. Logo segue que $\beta = \inf\limits_{BL_0(\Omega)} \Phi < 0$ e que u é uma solução não-trivial de (0.1).

■

Referências Bibliográficas

[1] ANZELLOTTI, G. *The Euler equation for functionals with linear growth*, Trans. Amer. Math. Soc., 290, No 2, (1985), 483 - 501.

[2] BARILE, S., Pimenta, M.T.O. *Some existence results of bounded variation solutions to* $1-$*biharmonic problems*, preprint.

[3] ATTOUCH, H., BUTTAZZO, G., MICHAILLE, G. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization*, MPS/SIAM Series on Optimization, 6, Philadelphia, 2006.

[4] CHANG, K. *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 80, (1981), 102 - 129.

[5] CHEN, Y., LEVINE, S., Rao, M. *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math., 66, (2006), 1383 - 1406.

[6] CONTI, S., FARACO, D., MAGGI, F. *A new approach to counterexamples to* L^1 *estimates: Korns̈ inequality, geometric rigidity, and regularity for gradients of separately convex functions*, Arch. Ration. Mech. Anal., 175, (2005), 287?300.

[7] EVANS, L.C., GARIEPY, R.F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, (1992).

[8] FIGUEIREDO, G.M., Pimenta, M.T.O. *Nehari method for locally Lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions*, preprint.

[9] FIGUEIREDO, G.M., Pimenta, M.T.O. *Strauss' and Lions' type results in* $BV(\mathbb{R}^N)$ *with an application to* $1-$*Laplacian problem*, preprint.

[10] FIGUEIREDO, G.M., Pimenta, M.T.O. *Existence of bounded variation solutions for a* $1-$*Laplacian problem with vanishing potentials* , preprint.

[11] GIUSTI, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984).

[12] KAWOHL, B., Schuricht, F. *Dirichlet problems for the* $1-$*Laplace operator, including the eigenvalue problem*, Commun. Contemp. Math., 9, (2007), 515 - 543.

[13] CLARKE, F. *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 205, (1975), 247 - 262.

[14] MILBERS, Z. *Eigenvalue problem for the* $1-$*Laplace operator*, Tese de doutorado. 241.

[15] MIRANDA, M. *Dirichlet problem with* L^1 *data for the non-homogeneous minimal surface equation*, Indiana Univ. Math. J., 24, (1974/75), 227 - 241.

[16] OBERSNEL, F., Omari, P. *Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation*, J. Differential Equations, 249, (2010), 1674 - 1725.

[17] E. PARINI, B. RUF AND C. TARSI, *The eigenvalue problem for the* $1-$*biharmonic problem*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 13, No. 5, (2014), 307 - 322.

[18] M. SQUASSINA, *On Palais' principle for non-smooth functionals*, Nonlinear Anal., 74, (2011), 3786 - 3804.

[19] SZULKIN, A. *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. C, 3, No 2, (1986), 77 - 109.

[20] GILBARG, D., TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin Heilderberg, (2001).