O TEOREMA DE SYLVESTER-GALLAI

Ana Cláudia Molina Zaqueu

Universidade de São Paulo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Programa Ensinar com Pesquisa

Palavras-chave: pontos não-colineares - Sylvester-Gallai - distância

Introdução e objetivos

Nosso objetivo é apresentar um teorema proposto por Sylvester em 1893. Começaremos com algumas curiosidades acerca do assunto e em seguida apresentaremos as ferramentas necessárias para a compreensão do teorema e sua demonstração.

A demonstração que mostraremos é devida a Leroy Milton Kelly.

Metodologia

Para o desenvolvimento desse trabalho adotamos um livro texto e complementamos o estudo fazendo uso da internet e bibliografias relacionadas. Semanalmente reunimos um grupo formado por alunos da graduação, mestrado e a orientadora para discussão do tema estudado.

Resultados e discussão

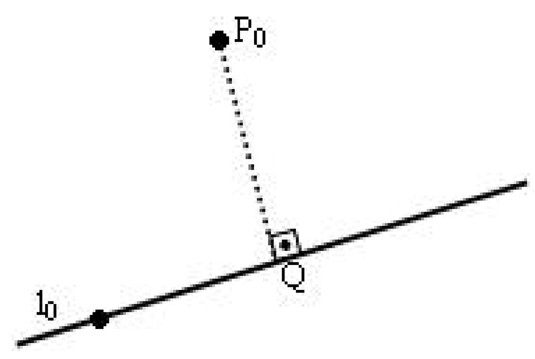
Em 1893 Sylvester, matemático inglês, propôs um problema em uma coluna de problemas matemáticos. Ainda no mesmo ano, Woodall publica, em 4 linhas, uma solução para o problema.

Posteriormente foram encontrados falhas em argumentos, o que tornava a prova incorreta. Após muitos anos de esquecimento finalmente, em 1943, Paul Erdös retoma ao problema proposto por Sylvester e no ano seguinte o matemático Tibor Gallai mostra, pela primeira vez, que o teorema é válido.

Após a demonstração de Gallai muitas outras foram encontradas utilizando diferentes ferramentas matemáticas. Apresentaremos agora uma prova simples e elaborada que faz uso apenas de estruturas Euclidianas (axiomas métricos e de ordem) dada por Kelly.

TEOREMA. *Em qualquer configuração de n pontos no plano, nem todos numa mesma reta, existe uma reta que contém exatamente dois dos pontos.*

Seja P o conjunto de pontos e tome L como o conjunto de TODAS as retas que passam por, no MÍNIMO, dois pontos de P. Note que a cada ponto de P podemos encontrar a distância dele a cada reta de L e ainda, como L e P são finitos temos um número finito de distâncias. Entre todos os pares (P, l) com P não pertencente a l, escolha um par (P_0, l_0) tal que P_0 tenha a menor distância não nula até l_0. Denote por Q o ponto em l_0 mais próximo de P_0.

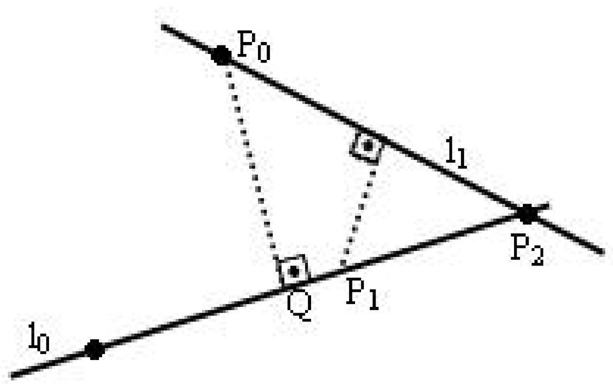


AFIRMAÇÃO. Essa reta l_0 faz o que se quer!

Vamos supor, por absurdo, que não. Logo, l_0 contém três pontos de P e assim, dois deles, P_1 e P_2, estão no mesmo lado de Q.

Assuma P_1 entre Q e P_2.

Note que podemos construir uma reta l_1 passando por P_0 e P_2. Além disso a distância de P_1 à reta l_1 é menor do que a distância de P_0 à l_0 o que contradiz nossa escolha de l_0 e P_0.



Aplicação

PROBLEMA: São dados $n \geq 3$ pontos no plano, nem todos colineares. Mostre que são necessários pelo menos n retas para unir todos os possíveis pares de pontos.

Vamos proceder usando indução.

i) Se $n = 3$ temos um triângulo. Note que as retas suportes dos três lados satisfazem nossa afirmação.

ii) Suponha que é válido para $n = k$.

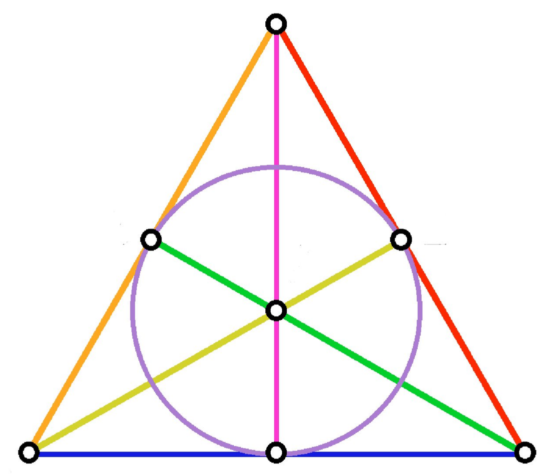
iii) Agora considere um conjunto T de $n = k + 1$ pontos. Como esses pontos não estão numa mesma reta então, pelo Teorema de Sylvester-Gallai existe uma reta que passa por apenas 2 pontos do conjunto. Digamos então que essa reta passe pelos pontos A e B do conjunto.

Pelo menos um dos conjuntos $T\backslash\{A\}$ ou $T\backslash\{B\}$ não poderá ter todos os seus k pontos não colineares.

Assim, pela hipótese de indução, teremos pelo menos k retas, assim a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$.

Conclusões

O Teorema de Sylvester é verdadeiro para conjunto finito de pontos em $\mathbb{R}^2$, mas é falso quando tomamos um conjunto infinito de pontos em R^n, com $n \geq 2$ ou mesmo um conjunto enumerável de pontos. Podemos exemplificar essa observação utilizando o famoso Plano de Fano (7 pontos) e o de Mckee (13 pontos).



O teorema também pode ser demonstrado sem o uso dos axiomas métricos. Dessa forma, com esse estudo temos clara a importância da estrutura matemática presente no espaço no qual estamos trabalhando.

Referências bibliográficas

1. AIGNER, MARTIN; ZIEGLER, GÜNTER M.. *Proofs From The Book.* Springer Third Edition, 2003.

2. NIRAJAN, NILAKANTAN. *Extremal Problems Related to the Sylvester-Gallai Theorem.* Combinatorial and Computational Geometry, MSRI Publications, Volume 52 (2005), 479-494.

3. BORWEIN, P.; MOSER, W.O.J. *A survey of Sylvester's problem and its generalization.* Aequationes Math. 40 (1990), no. 2-3, 111-135.