Um Estudo Sobre Curlicues

Ali Tahzibi[5], Bruno R. Carvalho[1], Dionatan R. Schmidt[2], Heitor A. S. Pereira[3], Jair M. Freitas[4], Lucas A. Santos[3]

[1]Universidade Federal de Goiás – Goiânia, GO

[2]Universidade Federal de Santa Maria – Santa Maria, RS

[3]Universidade Federal da Paraiba – Jõão Pessoa, PB

[4]Universidade Federal do Cariri – Juazeiro do Norte, CE

[5]Universidade de São Paulo, ICMC, Departamento de Matemática – São Carlos, SP (Orientador)

ali.tahzibi@gmail.com, brunoragonete@hotmail.com, dionatansp@yahoo.com.br,

heitor.hasp@hotmail.com, jairjua@hotmail.com, lucasreismat@gmail.com

Resumo. *Esse artigo é fruto de um mini-curso realizado durante o I Simpósio Nacional do PICME sobre curvas chamadas curlicues que são determinadas a partir de sequências reais. Mostraremos neste trabalho como algumas propriedades das sequências estão relacionadas com propriedades geométricas dessas curvas. Apresentaremos alguns detalhes das sequências do tipo $(n\alpha)$ e das curlicues determinadas por elas. Em seguida, trataremos das curlicues originadas a partir de uma construção peculiar de sequências não equidistribuidas.*

1. Preliminares

Inicialmente iremos definir um tipo especial de sequência real que desempenha um papel importante no estudo das *curlicues*.

Definição 1. Sejam (u_n) uma sequência de números reais no intervalo $[0, 1]$ e $a < b$ quaisquer tais que $[a, b] \subset [0, 1]$. Definimos

$$S_N^{[a,b]} = \frac{\#\{0 \leq n \leq N : u_n \in [a, b]\}}{N}$$

e dizemos que a sequência (u_n) é equidistribuida se

$$\lim_{N\to\infty} S_N^{[a,b]} = b - a$$

De forma intuitiva, se uma sequência (u_n) é equidistribuida no intervalo $[0, 1]$ então dado um elemento arbitrário de (u_n) a probabilidade deste elemento pertencer a um intervalo $I \subset [0, 1]$ é igual ao comprimento de I.

De imediato, percebe-se que se uma sequência (u_n) é equistribuída no intervalo $[0, 1]$ então ela é densa, pois, caso contrário, existiriam $x \in [0, 1]$ e $\epsilon > 0$ tais que $I \cap (u_n) = \phi$, com $I = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Logo $S_N^I = 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$, o que nos dá:

$$\lim_{N\to\infty} S_N^I = 0$$

Contrariando a equidistribuição. Observamos também que a recíproca não é verdadeira. Vejamos um contraexemplo:

Seja $\{x\}$ a parte fracionária e $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira do número real x, isto é, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Vamos mostrar que a sequência $(\{ln(n)\})$ é densa mas não é equidistribuida. Como a subsequência $(\{ln(2^n)\}) = (\{nln(2)\})$ é do tipo $(\{n\alpha\})$ com α irracional, segue que ela é densa (Teorema X a seguir) e portanto $(\{ln(n)\})$ é densa. Para mostrar que não é equidistribuída iremos verificar que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \leq n < e^N : \{ln(n)\} \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]\}}{e^N} \neq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Vamos calcular o número de elementos da sequência $(\{ln(n)\})$ que estão no intervalo $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})$. Denotando $x = \lfloor ln(n) \rfloor$ a parte inteira de $ln(n)$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$x + \frac{1}{k+1} < ln(n) < x + \frac{1}{k}$$

$$e^{x+\frac{1}{k+1}} < n < e^{x+\frac{1}{k}}$$

Para fazermos a contagem no intervalo $e^x(e^{\frac{1}{k}} - e^{\frac{1}{k+1}})$ temos que considerar todos os valores inteiros x possíveis, que nos dará:

$$\sum_{x=0}^{N-1} e^x(e^{\frac{1}{k}} - e^{\frac{1}{k+1}}) = \frac{(e^N - 1)}{e - 1}(e^{\frac{1}{k}} - e^{\frac{1}{k+1}})$$

Aplicando o limite, teremos

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(e^{\frac{1}{k}} - e^{\frac{1}{k+1}})(e^N - 1)}{(e-1)e^N} = \frac{(e^{\frac{1}{k}} - e^{\frac{1}{k+1}})}{(e-1)}$$

Portanto

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \leq n < e^N : \{ln(n)\} \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]\}}{e^N} = \frac{(e^{\frac{1}{k}} - e^{\frac{1}{k+1}})}{(e-1)} \neq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Logo, a sequência $(\{ln(n)\})$ não é equidistribuída.

$\blacksquare$

O teorema a seguir nos fornece uma caracterização para as sequências equidistribuidas. A sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 1. *(Critério de Weyl)* Uma sequência (u_n) é equidistribuida se, e somente se, para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \exp(2\pi k i u_n) = 0$$

Assim, para entender as propriedades de equidistribuição de uma sequencia (u_n) é suficiente estimar o tamanho da soma exponencial $\sum_{n=0}^{N} \exp(2\pi k i u_n)$. Em outras palavras, este critério nos diz que ao fazermos uma sequencia (u_n) girar em torno do círculo unitário no plano complexo k vezes o centroide obtido desses pontos se aproxima da origem quando k se torna grande.

2. Curlicues

Definição 2. Seja $u = (u_n)$ uma sequência de números reais. Chamamos Curlicue à curva $\Gamma(u) = \gamma([0,\infty))$ tal que:

$$\begin{aligned} &\gamma(0) = (0,0) \\ &\gamma(n) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\pi i u_k)\ n = 1, 2, \ldots\ldots \\ &\gamma(t) \text{ linear se } n \leq t \leq n+1 \end{aligned}$$

Deste modo a curlicue é gerada traçando-se segmentos unitários consecutivos cujo n-ésimo ponto é determinado a partir do ponto anterior e pelo ângulo $2\pi u_n$ com relação a horizontal.

Note que $\exp(2\pi i u_n) = \exp(2\pi i(\lfloor u_n \rfloor + \{u_n\})) = \exp(2\pi i \{u_n\})$, assim $\gamma(u_n) = \gamma(\{u_n\})$, ou seja, a curlicue gerada por uma sequência é igual a curlicue gerada pela sequência das partes fracionárias de seus termos.

Exemplo 1. A sequência $(n^2\pi)$ define a curlicue $\Gamma(n^2\pi)$ cuja imagem no plano complexo até o comprimento 5000 encontra-se na Figura 1.

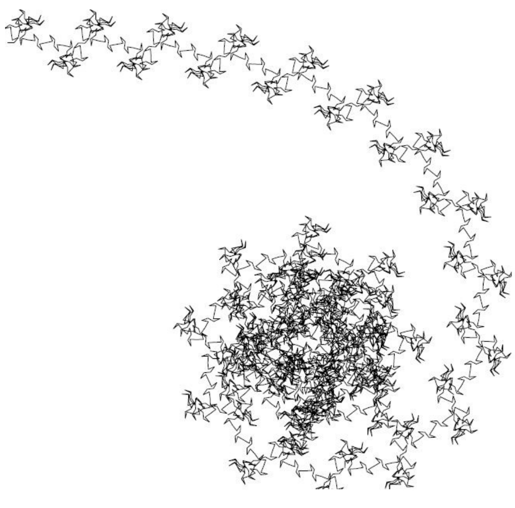

Figura 1. "π *curlicue*" $-$ $\Gamma_{5000}(n^2\pi)$

Na sequência trazemos algumas definições complementares que nos ajudam a caracterizar as *curlicues*.

Definição 3. Seja $d(\cdot,\cdot)$ a distância euclidiana. Para $A \subset \mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$ definimos:

$$DiamA = sup\{d(x,y); x, y \in A\}$$

Uma curva Γ é dita limitada se $Diam\Gamma < \infty$ e ilimitada se $Diam\Gamma = \infty$. A curlicue $\Gamma(n\pi)$ é limitada enquanto a curlicue $\Gamma(n)$ é ilimitada.

Definição 4. (i) Uma curva ilimitada Γ é superficial (planar) se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{Diam\Gamma_t} = \infty$$

Onde Γ_t é a parte inicial de Γ com comprimento t.

(ii) Uma curva limitada Γ é superficial (planar) se

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{Area\Gamma^\epsilon}{\epsilon} = \infty$$

Onde $\Gamma^\epsilon = \{y; x \in \Gamma, d(x,y) < \epsilon\}$.

No caso ilimitado entendemos que para a curva ser superficial o seu comprimento deve apresentar um crescimento “mais rápido” do que o seu diâmetro. Já para o caso limitado a área do conjunto Γ^ϵ deve manter-se suficientemente maior do que o ϵ quando este tende a zero.

Teorema 2. Uma sequência (u_n) é equidistribuida se, e somente se, o curlicue $\Gamma(qu_n)$ é planar para cada inteiro positivo q.

Prova: Seja $u = (u_n)$ uma sequência de números reais, e para todo inteiro positivo q considere

$$z_n(q) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2\pi i q u_k)$$

Suponha incialmente que $\Gamma(qu)$ é superficial, para todo $q \in \mathbb{Z}^+$. Feito isso, analisaremos os casos quando $\Gamma(qu)$ é limitada e ilimitada.

Para o caso limitado, temos que

$$|z_n(q)| \leq Diam\Gamma_n(qu) \qquad (*)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Diam\Gamma_n(qu)}{n} = 0$$

Para o caso ilimitado, também vale $(*)$, e por hipótese

$$lim_{n\to\infty}\frac{n}{Diam\Gamma_n(qu)}=\infty$$

e portanto

$$lim_{n\to\infty}\frac{Diam\Gamma_n(qu)}{n}=0$$

Logo, o limite acima é válido em ambos os casos. Segue então, da desigualdade $(*)$, que

$$lim_{n\to\infty}\frac{|z_n(q)|}{n}=0$$

O que implica, pelo Critério de Weyl, que (u_n) é equidistribuida.

Supondo agora que (u_n) é equidistribuída temos que, pelo critério de Weyl, para todo $q\in\mathbb{Z}^+$

$$lim_{n\to\infty}\frac{|z_n(q)|}{n}=0.$$

É fácil ver que

$$Diam\Gamma_n(qu)\le 2\max_{0\le k<n}|z_k(q)|.$$

Isto é, para o $n=k$ tal que temos o máximo $|z_n(q)|$, ao envolvermos a curlicue com uma circunferência de raío $|z_k(q)|$, ela conterá toda curlicue em seu interior. E uma vez que

$$lim_{n\to\infty}\frac{\max_{0\le k<n}|z_k(q)|}{n}=0$$

temos

$$lim_{n\to\infty}\frac{Diam\Gamma_n(qu)}{n}=0$$

Que é equivalente à definição de curva superficial para o caso ilimitado.

Resta agora mostrar para o caso limitado. Para tal, basta mostrar que qualquer sequência que possua infinitos termos com parte fracionária diferentes determinam uma curva superficial.

Seja $\alpha(.)$ o conteúdo unidimensional de Minkowski e $\tau(.)$ a medida unidimensional de Hausdorff para conjuntos planos. No caso unidimensional para curvas reficáveis, que é o caso das *curlicues*, ambos coincidem. Mas, escolhendo k_n, de modo que pelo menos n dos $u_k\in\{u_0,\dots,u_{k_n-1}\}$ são diferentes, então:

$$\tau(\Gamma_{k_n})\ge n\Longrightarrow\alpha(\Gamma)\ge\alpha(\Gamma_{k_n})=\tau(\Gamma_{k_n})\ge n.$$

Quando $n\to\infty$ temos que $\alpha(\Gamma)=\infty$. Como, neste caso,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{Area\Gamma^{\epsilon}}{\epsilon} = 2\alpha(\Gamma) = \infty$$

a curva Γ é superficial.

$\blacksquare$

3. Sequência $n\alpha$

Iremos agora nos concentrar nas *curlicues* determinadas por sequências do tipo $(n\alpha)$. Quando $\{\alpha\} \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ a curlicue é um polígono regular. Para α irracional a curlicue está contida em um anel cujos raios são:

$$R_{int} = \frac{|\cot(\pi\alpha)|}{2}\ ,\ R_{ext} = \frac{1}{2\,|\sin(\pi\alpha)|}$$

e seu centro tem coordenadas

$$C = \left(\frac{1}{2}, \frac{|\cot(\pi\alpha)|}{2}\right)$$

Teorema 3. Se $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ então a sequência $(n\alpha)$ é equidistribuida no intervalo $[0,1]$.

Prova: Uma vez que α é irracional temos que $\exp(2\pi ik\alpha) \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Assim, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikn\alpha) = \frac{\exp(2\pi ik\alpha)(\exp(2\pi ikN\alpha)-1)}{\exp(2\pi ik\alpha)-1}$$

Tomando o módulo e aplicando a desigualdade triangular

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikn\alpha)\right| = \left|\frac{\exp(2\pi ikN\alpha)-1}{\exp(2\pi ik\alpha)-1}\right| \leq \frac{2}{|\exp(2\pi ik\alpha)-1|}$$

Dividindo por N, e tomando o limite com $N\to\infty$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left|\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikn\alpha)\right|}{N} \leq \lim_{N\to\infty}\frac{2}{N\,|(\exp(2\pi ikn\alpha)|} = 0$$

Logo,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikn\alpha) = 0.$$

Portanto, pelo critério de Weyl, $(n\alpha)$ é equidistribuida para α irracional. $\blacksquare$

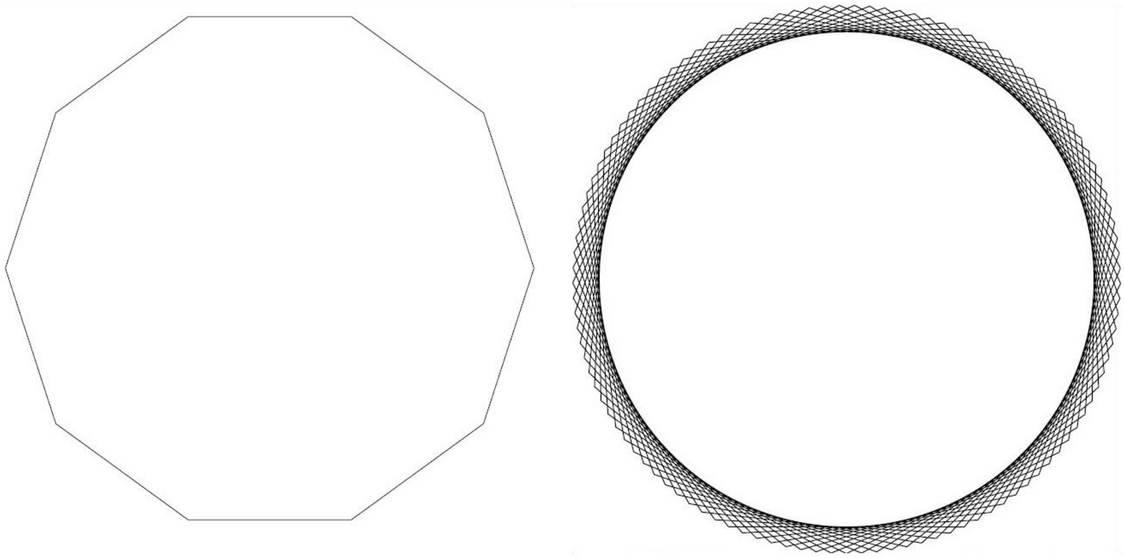

Figura 2. $\Gamma_{10}(0.1n)$ *e* $\Gamma_{120}(n\pi)$

4. Inserindo Sequências Constantes

Uma maneira fácil de construirmos sequências que não são equidistribuidas é, a partir de uma sequência a_n equidistribuida, considerar uma sequência b_n da seguinte forma

$$b_{2n} = 0$$

$$b_{2n+1} = a_n$$

ou seja, $b_n = (0, a_1, 0, a_2, 0, ...)$.

Dessa forma (b_n) não é uma sequência equidistribuída, pois $S_N^{(x-\frac{1}{5}, x+\frac{1}{5})} \geq \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

O exemplo acima nos motivou a estudar o comportamento das *curlicues* associadas à sequências (b_n) dadas por:

$$b_{pn+k} = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p-2 \tag{1}$$

$$b_{pn+p-1} = a_n \tag{2}$$

onde $2 \leq p \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ são constantes e a_n são os termos de uma sequência equidistribuida. Dessa forma, inserimos $p-1$ sequências constantes em uma sequência (a_n) equidistribuída.

Exemplo 2. Considere $a_n = n\pi$ e b_n dada por:

$$b_{3n} = 0$$

$$b_{3n+1} = \frac{1}{4}$$

$$b_{3n+2} = a_n$$

Assim, $(b_n) = (0, 1/4, a_0, 0, 1/4, a_1, \ldots)$.

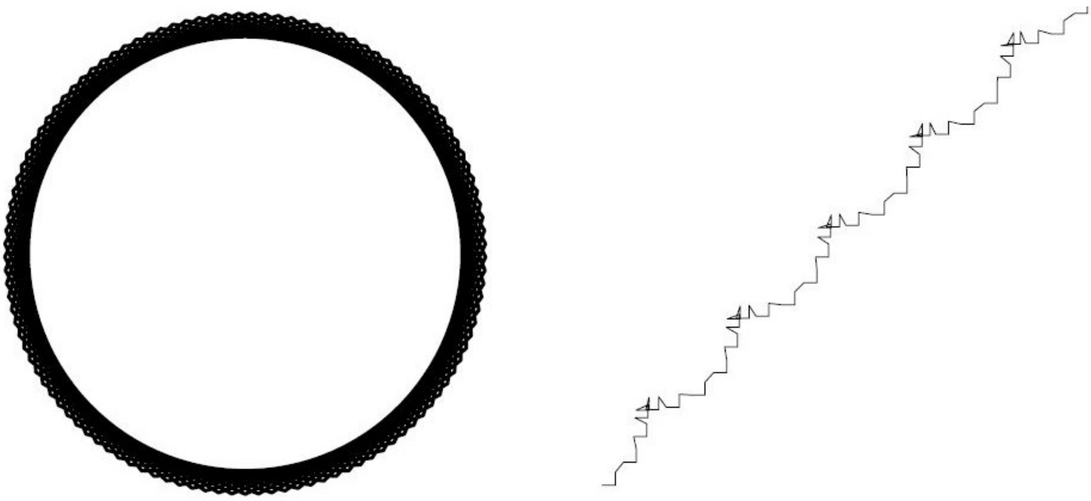

Figura 3. $\Gamma_{120}(n\pi)$ e $\Gamma_{110}(b_n)$

Exemplo 3. Considere $a_n = n\pi$ e b_n dada por:

$$b_{4n} = 0$$
$$b_{4n+1} = \frac{1}{3}$$
$$b_{4n+2} = \frac{2}{3}$$
$$b_{4n+3} = a_n$$

Assim, $(b_n) = (0, 1/3, 2/3, a_0, 0, 1/3, 2/3, a_1, \ldots)$.

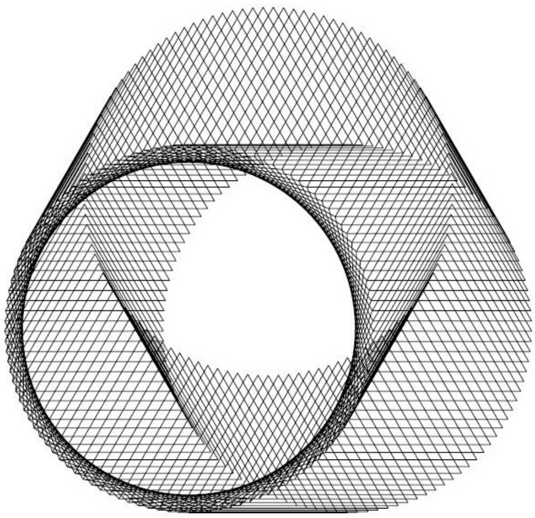

Figura 4. $\Gamma_{500}(b_n)$

Definição 5. Seja (u_n) uma sequência real. A direção do curlicue $\Gamma(u_n)$ é definida pelo vetor

$$v(u_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{N}$$

quando este existe e é não nulo. Onde

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \exp(2\pi i u_n).$$

Teorema 4. Se (b_n) é uma sequência dada pelas equações (1) e (2) acima, então

(i) A sequência (b_n) não é equidistribuida.

(ii) A direção do curlicue $\Gamma(b_n)$ será a do vetor:

$$v = \sum_{k=0}^{p-2} exp(2\pi i c_k)$$

caso este seja não nulo.

Prova:

(i) Seja $x_0 = \{c_0\}$. Tome $0 < \epsilon < \frac{1}{2p}$ e note que $S_N^{(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)} \geq \frac{1}{p}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ assim $\lim_{N\to\infty} S_N^{(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)} \geq \frac{1}{p} > 2\epsilon$ e portanto não é equidistribuida.

(ii) Supomos então que foram inseridas $p-1$ subsequências constantes, com $p \in \mathbb{N}$, de modo que a sequência b_n seja construída do modo apresentado anteriormente. Sem perca de generalidade, façamos $N = kp$, com $k \in \mathbb{Z}^+$. Logo, temos:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N} \exp(2\pi i b_n)}{N} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{pk} \exp(2\pi i b_n)}{kp}$$

Com $n = 0, 1, 2, \ldots, pk$, cada um dos c_k, com $k = 0, 1, \ldots, p-2$ aparece pelo menos k vezes na soma exponencial, bem como os k primeiros termos da a_n inicial, que é suposta equidistribuída, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{pk} \exp(2\pi i b_n)}{pk} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k\exp(2\pi i c_0) + \ldots + k\exp(2\pi i c_{p-2}) + \sum_{n=0}^{k-1} exp(2\pi i a_n)}{pk} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k\sum_{j=0}^{p-2} \exp(2\pi i c_j) + \sum_{n=0}^{k-1} \exp(2\pi i a_n)}{pk} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\sum_{j=0}^{p-2} \exp(2\pi i c_j)}{p} + \frac{\sum_{n=0}^{k-1} \exp(2\pi i a_n)}{pk} \right) \\
&= \frac{\sum_{j=0}^{p-2} \exp(2\pi i c_j)}{p} + \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} \exp(2\pi i a_n)}{pk}
\end{aligned}$$

Uma vez que é a_n é equidistribuída o último limite acima é zero pelo Critério de Weyl. Temos então

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{N} = \frac{\sum_{j=0}^{p-2} \exp(2\pi i c_j)}{p}$$

$\blacksquare$

5. Referências

[1]FRANCE, M. Mendes; DEKKING, Michel. Article, Uniform distribution modulo one: a geometrical viewpoint. Goettingen - Germany: Journal für die reine und angewandte, Mathematik - 329, 11:143-153, 1981.

[2]KAR, Aditi. Article, Weyl's Equidistribution Theorem. Bangalore - India: Resonance, Journal of Science Education, 8:30-37, May, 2003.

[3]PACE, Laura A.; SALAZAR-LAZARO, Carlos. Uniformly Distributed Sequences and their Discrepancies. Oregon State University, August 1996.