Passeios Aleatórios

Maria Silva Daltro Moura* – UFBA
Miguel Felipe Nery Vieira† – IFBA
Pedro Ivo de Oliveira Filho‡ – UFMG
Renato Santos da Silva§ – UFPI

Orientador: Pablo Martín Rodríguez¶ – ICMC/USP

31 de janeiro de 2014

Resumo

O passeio aleatório simples no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é um modelo estocástico usado para descrever a trajetória de uma partícula, que pode se mover por todos os sítios de $\mathbb{Z}$. A cada instante pode pular de um ponto x, para um de seus vizinhos, $x+1$ ou $x-1$, ao acaso. O relatório apresentado a seguir foi elaborado com o objetivo de trazer três abordagens distintas de passeios aleatórios.

Abstract

A simple random walk on the set of all integers $\mathbb{Z}$ is a stochastic model. It consists of a particle that can move in all $\mathbb{Z}$ sites. At every moment it can jump from a point x to one of its neighbors $x+1$ or $x-1$. This report was prepared with the goal of bringing three distinct approaches to random walks.

Palavras-chaves: ruína do jogador. vestibular. grafo.

*maria_moura10@hotmail.com
†migueelnery@gmail.com
‡ivopedro3@gmail.com
§renatoifpi@gmail.com
¶pablor@icmc.usp.br

1 Introdução

Neste trabalho é apresentado o projeto desenvolvido pelos autores durante as atividades do I Simpósio Nacional do PICME. A motivação se originou quando os autores resolveram a primeira lista de exercícios de um dos minicursos ministrados no Simpósio, chamado "Passeios Aleatórios". O relatório apresentado a seguir reúne três problemas sobre passeios aleatórios, cada um com uma abordagem diferenciada: passeio aleatório em uma dimensão com repouso, passeio aleatório em uma dimensão com armadilha e passeio aleatório no grafo estrela. Esses problemas remetem a questões cotidianas que podem ser resolvidas ou previstas.

1.1 Passeio Aleatório

O passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ é um processo estocástico que descreve o seguinte fenômeno: suponha uma partícula cuja posição no tempo n é dada pela variável aleatória X_n. A partícula se move nos sítios de $\mathbb{Z}$ e a cada instante n pode pular de um ponto x para um seus vizinhos $x+1$ ou $x-1$, com probabilidades p ou $q = 1-p$ respectivamente, sendo que p $\in [0,1]$. Tem-se que a sequência $(X_n)_{n\geq 0}$ é chamada de passeio aleatório. Essas probabilidades independem do ponto x. Quando o passeio for simétrico $p = \frac{1}{2}$.

1.2 Fórmula de Stirling

A necessidade dos matemáticos de calcular o fatorial de um número grande motivou o surgimento da fórmula de Stirling. Tal fórmula serve para aproximar o fatorial de um número n inteiro não negativo. A margem de erro desse cálculo é inferior a 1%, para n superior a 10. A fórmula de Stirling é uma ferramenta importante da teoria de probabilidades e pode ser enunciada da seguinte maneira:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

ou, em forma de limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Demonstração. Para provar a aproximação acima, note que:

$$log\ (n!) = log\ (1) + log\ (2) + log\ (3) \cdots log\ (n),$$

sabendo-se que a função logarítmica é crescente no intervalo de $[0,\infty]$, tem-se:

$$\int_{n-1}^{n} log\ (x)dx < log\ (n) < \int_{n}^{n+1} log\ (x)dx$$

Para $n \geq 1$, ou seja, $n = 1, 2, \cdots, N$, adiciona-se as desigualdades acima. Tem-se que:

$$\int_{0}^{N} log\ (x)dx < log\ (N!) < \int_{1}^{N+1} log\ (x)dx$$

É fácil verificar que a integral imprópria acima converge. Usando-se a antiderivada de $log\ (x)$, ou seja, $xlog\ (x) - x$, tem-se que:

$$nlog\ n - n < log\ n! < (n+1)log\ (n+1) + (n+1) - n$$

Seja $d_n = log\ n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) log\ n + n$. Subtraindo-se d_{n+1} de d_n, tem-se:

$$d_n - d_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) + log\ n + n - log\ (n+1)! + \left(n + \frac{3}{2}\right) log\ (n+1) - n - 1$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) log\ (n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) log\ n - 1$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) log\ \frac{n+1}{n} - 1.$$

$$= \frac{2n+1}{2} log\ \frac{n+1}{n} - 1$$

Sabe-se que:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n-1}}$$

Usando esse resultado e a série de Taylor associada ao logaritmo, tem-se:

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1)\left[\frac{1}{2n+1} \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + ...\right] - 1$$

$$= \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + ... - 1$$

Note que:

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2n+1^2}\frac{1}{(2n+1)^4} + ...\right]$$

Observe que a série acima é uma progressão geométrica. Tem-se:

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3}\left[\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}\right] = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

De fato como d_n é decrescente e $d_n - \frac{1}{12n}$ é crescente, então a sequência converge para algo. Dessa forma: $\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} d_n - \dfrac{1}{12n} =: C$, então:

$$C = \lim_{n\to+\infty} d_n < \infty$$

Conclui-se que:

$$n! \sim e^c n^{(n+\frac{1}{2})} e^{-n}$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}} = e^c$$

Foi tomado a exponencial de d_n. Precisa-se calcular o valor de e^c.
Usando-se o produto de Wallis que é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{2i}{2i-1}\frac{2i}{2i+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Reescrevendo, tem-se:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sim \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot\sqrt{2n}}$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

com isso tem-se que:

$$n! \sim e^c n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-n}$$

$$= \frac{2^{2n}\left(e^c n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-n}\right)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

então,

$$e^c \sim \sqrt{2\pi} \Rightarrow n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

como queríamos demonstrar.

1.3 Recorrência/Transiência

Supondo-se uma partícula que começa o seu movimento na origem, isto é, $X_0 = 0$, é interessante saber se a partícula voltará ou não ao ponto de origem, após um intervalo de tempo tendendo ao infinito. Caso a partícula volte, o tempo de seu primeiro retorno após o instante $n = 0$ é finito. Define-se esse tempo como:

$$T_0 := inf[n > 0 : X_n = 0]$$

Porém uma trajetória pode também nunca voltar à origem, nesse caso denota-se:

$$T_0 := \infty$$

Se $P(T_0 < \infty) = 1$, o passeio é recorrente. Caso contrário $P(T_0 < \infty) < 1$ o passeio aleatório é transiente.
É importante saber que:

$$P(X_n = 0|X_0 = 0) = \mu_n$$

Observa-se $\mu_n = 0$, se n é ímpar, e que:

$$[P(X_{2n} = 0|X_0 = 0)] = \mu_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

No decorrer do caminho percorrido, a partícula pode se mover para direita com probabilidade p, e para esquerda com probabilidade $1-p$. Logo, no espaço $2n$ tem-se a seguinte probabilidade:

$$p^n(1-p)^n$$

Seja Y uma variável aleatória que denota o número de vezes, dentre os $2n$ primeiros passos, que a partícula se desloca para direita. Note que
$Y \sim B(2n, n)$ e que $P(X_{2n} = 0|X_0 = 0) = P(Y = n)$, então:

$$\mu_{2n} = \tfrac{(2n)!}{(n!)^2} p^n(1-p)^n$$

Usando a fórmula de Stirling para aproximar essa probabilidade, tem-se que:

$$\mu_{2n} \sim \tfrac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \sqrt{4\pi n} \cdot p^n \cdot (1-p)^n}{n^{2n} \cdot e^{-2n} 2\pi n}$$

$$= \tfrac{2^{2n} \cdot 2 \cdot \sqrt{\pi n} \cdot p^n \cdot (1-p)^n}{2\pi n}$$

$$= \tfrac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Então, pode-se concluir que: $4p(1-p) < 1$, se $p \neq \frac{1}{2}$, o passeio é transiente.
$4p(1-p) = 1$, se $p = \frac{1}{2}$, o passeio é recorrente.
Conclue-se usando o resultado que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \infty$ se, e somente se, o passeio aleatório é recorrente.

2 Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^+$ com repouso

2.1 PROBLEMA. Considere uma partícula em $\mathbb{Z}^+$. A cada instante, a partícula vai para a direita ou permanece em repouso. Assume-se que os resultados de cada instante são independentes e que a partícula tem probabilidade p de permanecer em repouso e $(1-p)$ de se mover para a direita, como mostra a Figura 1 abaixo:

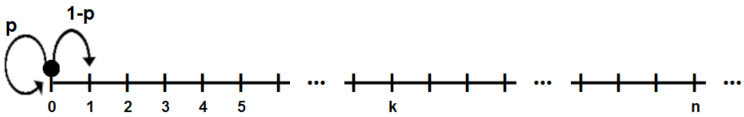

Figura 1. Passeio com repouso.

Quer-se calcular a probabilidade da partícula ocupar exatamente a posição k no instante $t = n$, dado que a partícula começa na posição 0 no instante $t = 0$. Também, dado o instante $t = n$, quer-se saber a probabilidade da partícula estar antes da posição k.

2.2 SOLUÇÃO. Serão propostos dois métodos para solucionar tal problema.

i)Observe que para a partícula ocupar a posição k, ela terá que se mover para direita exatamente k vezes, de modo que ela terá ficado em repouso $(n - k)$ vezes. Sabe-se que a cada instante a partícula se move para direita ou permance em repouso, mas para que ela termine em k no instante $t = n$, a partícula deverá se mover para direita no instante $t = n - 1$. Os demais instantes podem ser um movimento para direita ou o repouso. Por exemplo, para $n = 5$ e $k = 2$, uma das sequências possíveis é: repouso, repouso, direita, repouso e direita.

De modo geral, a quantidade total de sequências será dada pela combinação binomial em que se escolhe $(k-1)$ instantes representando movimentos para direita dentre os $(n - 1)$ movimentos, já que sabe-se que o último movimento será para direita. Definindo-se X como uma variável aleatória que representa o número total de instantes, pelo exposto acima, sua distribuição de probabilidade será:

$$P(X = n) = \tbinom{n-1}{k-1} p^{n-k}(1 - p)^{k-1}(1 - p)$$

$$= \tbinom{n-1}{k-1} p^{n-k}(1 - p)^{k}$$

Observa-se que a probabilidade acima é uma distribuição binomial negativa, cujo valor médio é:

$$E(X) = \tfrac{k}{(1-p)}$$

ii)Em outra análise, define-se a variável aleatória Y tal que

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{com prob } p, \\ 1 & \text{com prob } (1 - p) \end{cases}$$

Observe que $Y = 0$ representa repouso, enquato que $Y = 1$ representa um movimento para direita. Veja que Y segue uma distribuição de Bernoulli. Pode-se definir uma variável aleatória Z que representa a posição da partícula no instante n. Observa-se que a variável aleatória Z é a soma de n variáveis aleatórias de Bernoulli independentes, tal soma tem, obviamente, distribuição binomial:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Z \sim \text{Binomial } (n, 1 - p)$$

Dessa forma, a probabilidade da partícula ocupar a posição k no instante n será:

$$\alpha = P(Z = k) = \tbinom{n}{k}(1 - p)^k p^{n-k}$$

2.3 MOTIVAÇÃO. Anualmente, milhões de jovens prestam vestibulares. Porém, a realização destes muitas vezes não é restrita a uma universidade. Ou seja, há alunos que são aprovados em mais de uma instituição. Sem contar com os treineiros que são aprovados e não podem se matricular. Esses são exemplos de motivos que geram um déficit entre o número de alunos matriculados em primeira chamada e o número de vagas ofertadas. As vagas residuais geram uma segunda chamada e assim sucessivamente, até que, idealmente, todas as vagas sejam preenchidas. Porém, tal processo tem duas falhas inadmissíveis.

A primeira falha é o atraso considerável para o preenchimento das vagas. Algumas vezes o número de chamadas chega a ser tão grande que as aulas começam sem o preenchimento efetivo do total de vagas. A partir desse momento, os próximos candidatos convocados entrarão já tendo perdido dias letivos. Por exemplo, suponha uma universidade cuja primeira chamada ocorre na primeira semana de fevereiro e cujas aulas se iniciam na primeira semana de março. Cada chamada sucessiva ocorre uma semana após a precedente. Se o processo levar seis chamadas para preenchimento das vagas, apenas na segunda semana de março ocorrerá a última chamada. Dessa forma, alguns alunos acabarão por perder parte das aulas.

A segunda falha segue da primeira. Seguindo o mesmo exemplo acima, caso o processo tenha chegado na nona chamada sem preencher todas as vagas, torna-se inviável a realização de uma décima chamada. O motivo é simples: não se pode, responsavelmente, admitir um aluno que já perdeu mais de um mês de aulas. Isso fará com que as vagas não preenchidas acabem por ficar ociosas, apesar de que outros candidatos estavam aptos a preenchê-las.

Para amenizar os problemas acima, sugere-se uma nova política de chamadas. Tal política se basearia em um modelo probabilístico para que, na primeira chamada, sejam convocados mais candidatos que o número de vagas. Isso seria feito levando-se em conta as desistências dos anos anteriores. Os candidatos excedentes seriam chamados a fazer uma pré-matricula, estando cientes que poderão acabar sem vaga, com dada probabilidade. No modelo conservador, esses estudantes só seriam chamados após a manifestação de desistência dos candidatos aprovados, enquanto que no modelo proposto pelo presente estudo, poder-se-ia chamar parte dos alunos excedentes e ainda informá-los no fim do dia da pré-matrícula se eles conseguirão ou não uma vaga.

Tal modelo, poderá ser ampliado para considerar as desistências de alunos durante o período de formação. Por exemplo, é comum a desistência de diversos alunos no fim do primeiro ano letivo. Um novo modelo consideraria o número final de alunos que deverão se formar, estruturando-se os primeiros anos para receber mais alunos, levando-se em conta as desistências.

2.4 SOLUÇÃO. O estudo do Passeio Aleatório em $\mathbb{Z}^+$ feito acima poderá ser utilizado para solução desse problema. A interpretação é simples: o repouso da partícula significa a desistência de um candidado, enquanto que o movimento para direita significa uma matrícula efetuada. Pode-se interpretar como k o número de vagas que deverão ser preenchidas e n o número de candidatos chamados.

Considera-se a distribuição binomial descrita acima. De acordo com os dados sobre desistências dos anos anteriores, pode-se estimar a probabilidade p de desistência, que é usada para simular o número x de desistências que ocorrerão quando forem chamados n candidatos. Além disso sabe-se que chamando-se mais x candidatos, haverá também uma certa desistência e assim por diante. Dessa forma, faz-se um cálculo recursivo para se estimar o número total de desistências. Exemplo: Suponha um curso com 100 vagas. Sabe-se que nos quatro vestibulares anteriores, a desistência em primeira chamada foi de $18, 21, 22$ e 19 candidatos, respectivamente. Dessa forma, estima-se a probabilidade p de desistência como a média aritmética da probabilidade de desistência de cada ano passado:

$$p = \frac{(\frac{18}{100} + \frac{21}{100} + \frac{22}{100} + \frac{19}{100})}{4}$$

$$= 0,2$$

Como a média de uma binomial é np, tem-se que a desistência em primeira chamada será de $100 \times 0,2 = 20$ candidatos. Mas desses 20, desistirão $20 \times 0,2 = 4$. Como $4 \times 0,2 = 0,8$, a parte inteira é nula então para-se a recurssão.

O total de alunos, em média, que serão necessários para preencher as 100 vagas será $100 + 20 + 4 = 124$. A pergunta é: caso sejam chamados 124 candidatos, qual a probabilidade de que no máximo 100 se matriculem? Ou seja, quer-se calcular:

$$\beta = P(Z \leq 100) = \sum_{i=0}^{100} \binom{124}{i} (0,8)^i (0,2)^{124-i}$$

Como exemplo, segue o resultado simulado pelo software Matlab R2012a: Sendo C o número de candidatos chamados e pr a probabilidade aproximada, com três casas decimais, de se matricularem no máximo 100 candidatos:

C = 101, pr = 100.000%	C = 102, pr = 100.000%	C = 103, pr = 100.000%
C = 104, pr = 100.000%	C = 105, pr = 100.000%	C = 106, pr = 99.999%
C = 107, pr = 99.998%	C = 108, pr = 99.992%	C = 109, pr = 99.977%
C = 110, pr = 99.942%	C = 111, pr = 99.864%	C = 112, pr = 99.706%
C = 113, pr = 99.411%	C = 114, pr = 98.898%	C = 115, pr = 98.064%
C = 116, pr = 96.784%	C = 117, pr = 94.928%	C = 118, pr = 92.373%
C = 119, pr = 89.024%	C = 120, pr = 84.829%	C = 121, pr = 79.794%
C = 122, pr = 73.993%	C = 123, pr = 67.558%	C = 124, pr = 60.676%

Observe que o complementar de cada probabilidade acima é a probabilidade de se matricularem mais que 100 candidatos.

Parece estranho o fato de com 100.000% de probabilidade pelo menos um candidato desistirá da matrícula, mas isso é facilmente entendido observando-se a distribuição de probabilidade binomial quando se chama 101 candidatos, como mostra a Figura 2:

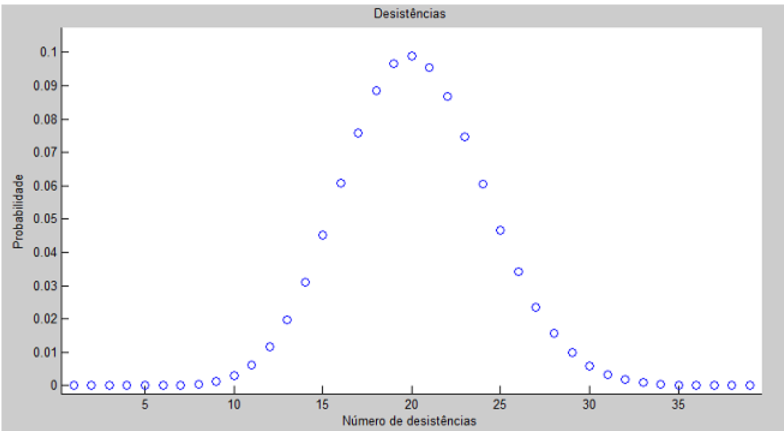

Figura 2. Distribuição de probabilidade binomial.

Observe que a probabilidade de exatamente um candidato desistir é aproximadamente zero.

Caso o cálculo exato se torne computacionalmente inviável (já que usa fatoriais), pode-se usar a aproximação da Binomial pela Normal da seguinte forma:
Se Z segue a Binomial $(n,(1-p))$, de média $E(Z)=n(1-p)$ e desvio padrão $\sigma(Z)=\sqrt{n(1-p)p}$, então se satisfeito o Teorema Central do Limite, Z aproximadamente segue $Normal(E(Z),\sigma(Z))$.
Como visto acima, chamar 114 candidatos em primeira chamada seria algo bem razoável a se fazer, sendo que os 14 últimos seriam avisados que a pré-matrícula deles tem quase 99% de probabilidade de ser efetivada.

De maneira análoga, poder-se-ia modelar a quantidade de candidatos a serem chamados levando-se em conta a desistência de alunos durante o curso. Tembém seria possível usar, por exemplo, a distribuição binomial negativa ou a t-Student para as modelagens mostradas. Fica como exercício para o leitor a comparação dos resultados usando-se diferentes distribuições. Como motivação, seguem as probabilidades arredondadas calculadas para o exemplo acima usando-se a distribuição t-Student:

C = 101, pr = 100%	C = 112, pr = 100%	C = 119, pr = 99%
C = 120, pr = 98%	C = 121, pr = 97%	C = 121, pr = 96%
C = 121, pr = 95%	C = 122, pr = 94%	C = 122, pr = 93%
C = 122, pr = 92%	C = 122, pr = 91%	C = 122, pr = 90%
C = 122, pr = 89%	C = 123, pr = 88%	C = 123, pr = 87%
C = 123, pr = 86%	C = 123, pr = 85%	C = 123, pr = 84%
C = 123, pr = 83%	C = 123, pr = 82%	C = 123, pr = 81%
C = 123, pr = 80%	C = 123, pr = 79%	C = 123, pr = 78%
C = 123, pr = 77%	C = 124, pr = 76%	C = 124, pr = 75%
C = 124, pr = 74%	C = 124, pr = 73%	C = 124, pr = 72%
C = 124, pr = 71%	C = 124, pr = 70%	C = 124, pr = 69%
C = 124, pr = 68%	C = 124, pr = 67%	C = 124, pr = 66%
C = 124, pr = 65%	C = 124, pr = 64%	C = 124, pr = 63%
C = 124, pr = 62%	C = 124, pr = 61%	C = 124, pr = 60%

Observa-se que a probabilidade média foi calculada usando-se uma amostra com quatro dados de desistências. Dessa forma, o intervalo de confiança é baseado em um valor do parâmetro t da distribuição relativo à $4-1=3$ graus de liberdade. A distribuição t-Student é especialmente eficaz para amostras pequenas, quando o Teorema Central do Limite não é perfeitamente satisfeito e não se pode usar a distribuição Normal.

3 Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ com armadilhas

No passeio aleatório com armadilha, a qualquer momento a partícula que está no instate x pode pular para seus vizinhos, $x+1$ e $x-1$, com probabilidades p e q, respectivamente. Ou sair da reta $\mathbb{Z}$, e entrar na armadilha, com probabilidade r. Como representado na Figura 3 abaixo:

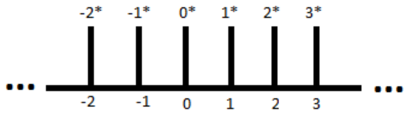

Figura 3. Passeio com armadilhas.

3.1 MOTIVAÇÃO. A ruína do jogador, proposto originalmente por Blaise Pascal, em 1656, é um problema clássico de processos estocásticos, cujo objetivo está em calcular a probabilidade que um jogador tem de perder seu recurso financeiro (cair na ruína) ou sobreviver e ganhar o jogo. Considere o jogo da ruína simétrico onde não existe uma fronteira, ou seja, o jogo não termina quando se chega a 0 (ruína), e nem quando se chega a n (soma dos capitais dos jogadores). A cada rodada um apostador pode ganhar 1, com a probabilidade p; perder 1 com a probabilidade q; ou abandonar o jogo o jogo com a probabilidade r. Pretende-se calcular a probabilidade de um determinado jogador lucrar.

3.2 PROBLEMA. No jogo da ruína, um determinado jogador começa com capital i. A cada rodada, ele pode ganhar e perder R$1,0, com probabilidades p e q, respectivamente, ou abandonar o jogo com probabilidade r. Qual a probabilidade deste jogador sair com lucro?

3.3 SOLUÇÃO.
Considere as seguintes variáveis aleatórias:
X_n = dinheiro do jogador após a n-ésima jogada;
T = números de jogadas até acontecer o abandono.
Mostra-se a seguir um roteiro para se calcular a probabilidade do jogador sair no lucro, dado que ele começa com R$ i, ou seja:

$$P(A|\{X_0 = i\})$$

Precisa-se saber:
i) $P(T = t) = ?$

ii) $P(A|X_0 = i, T = t) = ?$
Precisa-se calcular i) e ii). Note que para abandonar o jogo em t jogadas é necessária a ocorrência de $t-1$ jogadas até o abandono. Mas isso ocorre com probabilidade:

$$(1-r)^{t-1} \cdot r$$

Portanto, $P(T = t) = (1-r)^{t-1} \cdot r$, o que é uma distribuição Geométrica (r).
Para ii), considera-se o caso $p = q \Rightarrow P(A|X_0 = i, T = t)$ é a probabilidade do jogador terminar com lucro, dado que começa com i, e termina com $i+1$, $i+2$, ou $i+3 \cdots$ após t jogadas:
Seja $j > i$ calcula-se $P(X_t = j|X_0 = i)$. Por exemplo:

$$\cdot \rightarrow \cdot \rightarrow \cdot \rightarrow \cdot \rightarrow \cdot \uparrow$$

O problema é análogo a contar arranjos de:

$$\leftarrow, \rightarrow, \cdots \rightarrow, \leftarrow$$

Note que se $k = j - i$ o problema é encontrar $P(X_t = k|X_0 = 0)$. Tem-se casos:
a)Se k é par e t é par, então:

$$P(X_t = k|X_0 = 0) = 0$$

b)Se k é par e t é ímpar, então:

$$P(X_t = k|X_0 = 0) = \begin{pmatrix} t-1 \\ k + \frac{t-1-k}{2} \end{pmatrix} \cdot r \cdot p^{t-1}$$

Lembre-se que $p = q$, então:

$$P(X_t = k|X_0 = 0) = \begin{pmatrix} t-1 \\ \frac{t+k-1}{2} \end{pmatrix} \cdot r \cdot p^{t-1}$$

O cálculo para k ímpar é análogo ao descrito acima. Tem-se que:

$$P(A|X_0 = i) = \sum_{e=1}^{\infty} P(A|X_0 = i, T = e) P(T = e)$$

$P(A|X_0 = i, T = e)$ é a probabilidade de o jogador sair no lucro se ele começa com i e joga e vezes até abandonar. Mas, essa probabilidade é igual a:

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} P(X_e = j|X_0 = i)$$

iii) Outra quantidade que se pode estimar é o valor de t, tal que dado um $0 < \alpha < 1$, resulta:

$$P(T > t) < 1 - \alpha$$

Mas como

$$P(T > t) = (1 - r)^t \Rightarrow (1 - r)^t < (1 - \alpha)$$

Se, e somente se,

$$t \cdot log(1 - r) < log(1 - \alpha) \Rightarrow t < \tfrac{log(1-\alpha)}{log(1-r)}$$

encontra-se um valor de t tal que a probabilidade de o jogador abandonar o jogo após t jogadas é menor que $1 - \alpha$
Observe que, se $\alpha = 0,95$ (95%), então:

$$t^* < \tfrac{log(1-\alpha)}{log(1-r)}$$

Sabe-se que $P(T > t^*) < 0,05$ ou $P(T \leq t^*) \geq 0,95$. Isso significa que com alta probabilidade o jogo vai terminar antes deste valor t^*, então pode-se simular até t^*.

3.4 SIMULAÇÃO. Nessa simulação três jogadores disputam com outros três jogadores fictícios, todos começam com $i = 100$ e as cores simbolizam cada jogador. Foram considerados $r = 0,00001$, $\alpha \sim 0,8$. Com isso, $t \sim \frac{log(1-\alpha)}{log(1-r)} \sim 161000$. O software utilizado para as simulações chama-se R.
Observe a Figura 4 a seguir:

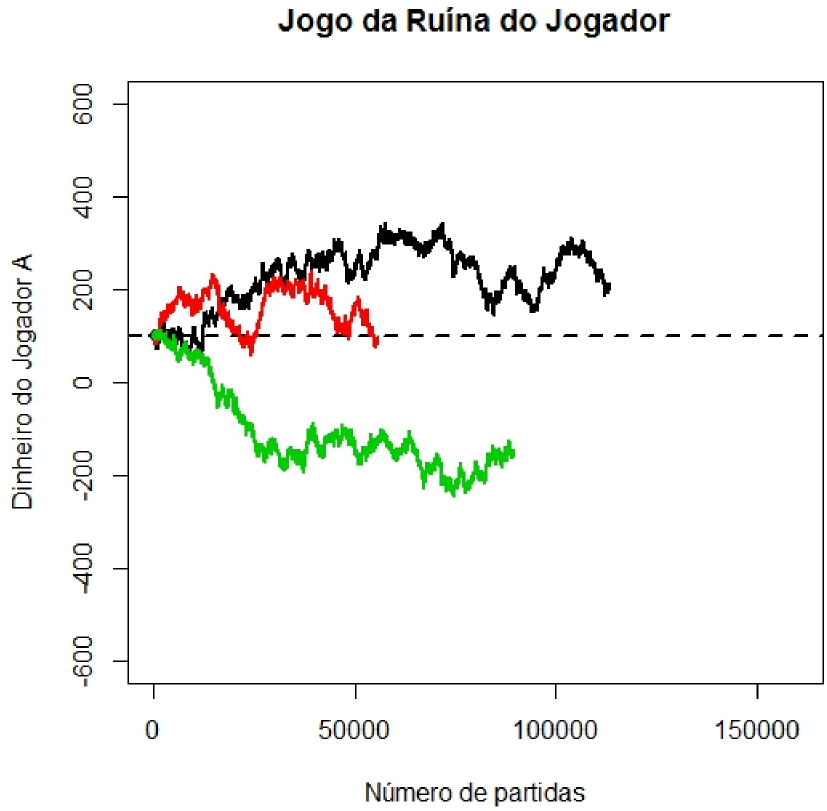

Figura 4. Gráfico do passeio com armadilhas.

Nesse jogo, o jogador da curva preta obteve lucro de 108 sobre o seu oponente, já o da curva vermelha teve um pequeno prejuízo de 16. Entretanto, quem realmente saiu derrotado foi o jogador da curva verde que além de perder todo o seu montante, ainda pediu emprestado, acarretando uma grande perda de 252. Sendo que ele pediu emprestado 152.

4 Passeio aleatório no grafo estrela

4.1 MOTIVAÇÃO. Um grafo estrela é um grafo onde existe um vértice central que é adjacente a todos os outros vértices do grafo, também pode ser definido como o único grafo conectado em que no máximo um vértice tem grau maior que 1, como mostrado na Figura 5:

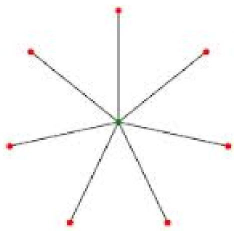

Figura 5. Grafo Estrela.

Deseja-se estudar um movimento que parte do vértice central e percorre os outro vértices, como ilustrado no seguinte problema:

4.2 PROBLEMA. Suponha que uma pessoa popular (A), domine uma informação e deseje compartilha-lá da seguinte maneira: visita ao sítio de outra pessoa ($B1$) e compartilhe a informação; A retorna ao seu lugar de origem, e então visita outra pessoa ($B2$); Ao visitar novamente qualquer uma das partículas $(Bi)_{i=1}^{k}$ encerra seu movimento supondo já haver informado a todos. Deseja-se calcular a probabilidade e a distribuição de A informar um número k de pessoas.

4.3 SOLUÇÃO. Vamos calcular a probabilidade da partícula informar um número k de pessoas. Observe que no primeiro movimento a partícula tem liberdade de escolher quaisquer n pessoas dentre as n possibilidades $\left(\frac{n}{n}\right)$, retornando logo em seguida ao seu local de origem (centro do grafo estrela). A escolha da próxima pessoa a ser informada é calculada por $\left(\frac{n-1}{n}\right)$, visto que 1 pessoa já foi informada, e assim sucessivamente:

$$\left(\frac{n}{n}\right) \times \left(\frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{n-2}{n}\right) \times ... \times \left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

Ao alcançar o número k de informados, a partícula precisa encerrar o movimento, informando alguém que já foi informado anteriormente, portanto temos k possibilidades dentre um total n. Sendo X a variável aleatória que denota o número de pessoas informadas, tem-se que a probabilidade de k pessoas serem informadas é dada por:

$$P(X = k) = \left(\frac{n}{n}\right) \times \left(\frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{n-2}{n}\right) \times ... \times \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \times \left(\frac{k}{n}\right)$$

Observe que:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)$$

pode ser representado como $\frac{n!}{(n-k)!}$. Logo:

$$P(X=k) = \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{k}{n^{(k+1)}}$$

Aproximando por Stirling, tem-se:

$$P(X=k) \sim \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{(n-k)^{n-k} e^{k-n}\sqrt{2\pi(n-k)}} \cdot \frac{k}{n^{k+1}}$$

$$P(X=K) \sim \frac{n^n \sqrt{n}}{(n-k)^n (n-k)^{-k} e^k \sqrt{n-k}} \cdot \frac{k}{n^k n}$$

como, $\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \approx e^{-k}$, para n suficientemente grande. Logo:

$$\frac{\sqrt{n} \cdot n^{-k}}{e^{-k} \cdot (n-k)^{-k} \cdot e^k \cdot \sqrt{n-k}} \cdot \frac{k}{n} =$$

sendo $\left(1-\frac{k}{n}\right)^{-k} = \left[\left(1-\frac{k}{m}\right)^n\right]^{\frac{-k}{n}} \approx e^{\frac{k^2}{n}}$ e
$\left(1-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1-\frac{k}{m}\right)^n\right]^{\frac{1}{2n}} \approx e^{\frac{-k}{2n}}$ tem-se

$$P(X=k) \approx \frac{k}{n} \cdot e^{\frac{-k(k-2)}{2n}}$$

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nossa gratidão a todos os que, com grande competência, contribuíram para escrita desse relatório. Em especial, ao prof. Pablo Rodriguez, que contribuiu com as discussões teóricas. Igualmente gostaríamos de agradecer ao prof. Ali Tahzibi por ajudar na organização do I Simpósio Nacional do **PICME**. Também não podemos deixar de agradecer a toda a equipe do **PICME**, especialmente à profa. Sylvie Oliffson Kamphorst, coordenadora nacional. Agradecimentos ao **CNPq** e à **CAPES** pelo auxílio financeiro.

Referências

KHOURI, R. S., (2013) Estudos sobre um modelo estocástico para evolução de uma espécie.

FRIEDLI, S.(2011) Dinâmica Estocástica: três exemplos.

ROSS, S. M., Probabilidade: um curso moderno com aplicações, 8ª ed, São Paulo, Bookman, 2010, 606p.

JUNIOR, F. J. M., BORTOLOTTI, S. L.V., COELHO, A. S., Considerações sobre a ruína do jogador.

JEN, C. Y.; KIRA, E. Passeios aleatórios: flutuações no lançamento de moedas e ruína do jogador.

DRUGOWICH DE FELICIO, J.R. Matemática Universitária, nº17, dezembro de 1994, p. 40-51.

PEREIRA, F. A. C.(2009), Passeio Aleatório.

AMARAL, J. C. (2010), Passeios Aleatórios e Grandes Desvios em Ambientes Aleatórios.

FELLER, W. (1976) Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações (Parte I), Edgard Blücher Ltda.

KHAMSI, M. A., (1996) Stirling's Formula. S.O.S. Mathematics CyberBoard.

RUDNICK, J.; GASPARI, G, (2010) Elements of the Random Walk. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

ROSS, SHELDON M. (2006) Introduction to Probability Models. Academic Press.

DANTAS, C. A. B. (2004) Probabilidade: Um curso introdutório, 2a Ed. 1 reimpr., Edusp.

GRINSTEAD & SNELL (1997) Introduction to Probability, 2nd rev. ed., AMS.