Projeto de mini-curso para a XVII Escola de Geometria Diferencial

Por: Ion Moutinho Gonçalves

Título: Geometria Diferencial do Espaço Hiperbólico

Introdução:

Este é um projeto para um estudo do espaço hiperbólico no contexto da Geometria Diferencial. A idéia é escolher um modelo adequado para o espaço hiperbólico, introduzir um sistema de coordenadas e utilizar os métodos do Cálculo. Mais precisamente, a Geometria Diferencial será utilizada para estudar superfícies do espaço hiperbólico. Assim, o estudo apresentado será análogo ao estudo das superfícies do $\mathbf{R}^3$.

Um dos interesses deste estudo é mostrar como que uma mesma técnica pode ser aplicada em espaços tão diferentes. Contudo, também utilizaremos a Geometria diferencial para evidenciar algumas diferenças importantes entre o espaço Euclidiano e o hiperbólico.

As superfícies de rotação terão atenção especial. Um dos resultados principais que será mostrado no mini-curso é o que garante a existência de uma infinidade de superfícies mínimas de rotação no espaço hiperbólico, fato que contrasta com o caso Euclidiano.

Outro assunto de destaque é a decomposição do espaço hiperbólico por uma representação que generaliza a noção de coordenadas esféricas e cilíndricas do $\mathbf{R}^3$. Esta decomposição será formalizada no final do curso como o conceito de *produto warped*.

Objetivos:

A. Apresentar um estudo de Geometria Diferencial de caráter elementar, para alunos de mestrado e graduação. O propósito aqui é apresentar um estudo intermediário, entre o estudo das superfícies do $\mathbf{R}^3$ e o da Geometria Riemanniana.

B. Introduzir um estudo de Geometria Diferencial para o espaço hiperbólico, definindo um sistema de coordenadas, através do modelo do semi-espaço de Poincaré, $\mathbf{H}^3$, uma noção de métrica que generaliza a noção de produto interno para espaço vetorial e a noção de derivada covariante.

C. Apresentar um estudo bastante didático, pois este será desenvolvido num ambiente desprovido de uma estrutura de espaço vetorial. Por exemplo, a noção de derivada covariante em uma superfície do $\mathbf{R}^3$ é definida pela projeção ortogonal da derivada de $\mathbf{R}^3$ obtida pela estrutura de espaço vetorial. No caso do modelo escolhido para $\mathbf{H}^3$, esta idéia não pode ser reproduzida, é preciso empregar uma idéia um pouco mais geral e que posteriormente será útil para as variedades diferenciáveis (esta é uma das razões para a escolha de tal modelo).

   Ainda existe outro aspecto particular que deve tornar o estudo especialmente didático. O modelo de $\mathbf{H}^3$ escolhido é descrito por um sistema de coordenadas de uma carta só, a aplicação i: $U \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{H}^3$, $i(x) = x$, para todo $x \in U$, onde $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Assim, ainda tendo que respeitar os mesmos cuidados que um estudo com variedades, pois o modelo escolhido para $\mathbf{H}^3$ não possui uma estrutura de espaço vetorial compatível, este estudo será feito de forma bem mais simples, pois não será preciso se preocupar com a questão da mudança de cartas de um atlas.

D. Desenvolver um estudo análogo ao que normalmente se faz para as superfícies do $\mathbf{R}^3$. Contudo, a analogia obtida na conceituação e em vários resultados não é completa. Por exemplo, será visto que, em $\mathbf{H}^3$, é possível se obter superfícies completas de curvatura Gaussiana constante para qualquer constante, mesmo negativa, ou que existem cones completos.

E. Desenvolver a percepção de um estudo de natureza intrínseca e sem o apoio de uma estrutura linear externa. Esta característica será trabalhada na introdução da noção de derivada covariante para $\mathbf{H}^3$.

F. Definir sistemas de coordenadas que generalizam as coordenadas esféricas e cilíndricas do $\mathbf{R}^3$. Em particular, propor uma noção alternativa de decomposição do $\mathbf{H}^3$, uma vez que não é possível definir um sistema de coordenadas cartesianas no espaço hiperbólico. Este é outro trabalho de caráter didático e visa uma preparação para um futuro estudo da noção de *produto warped*.

G. Definir e estudar as superfícies de rotação e os cones do espaço hiperbólico. Este estudo em $\mathbf{H}^3$ é bem rico, pois é possível generalizar a noção de superfície de rotação de 3 maneiras.

H. Estimular o aluno a formular perguntas e pesquisar sobre Geometria Diferencial. O texto irá mostrar (com fatos provados e com exemplos) como algumas idéias são análogas ao caso Euclidiano, mas também mostrará que podem existir diferenças. Assim, o estudante será motivado em vários momentos, como exercício, a verificar se determinado fato conhecido sobre superfícies de $\mathbf{R}^3$ também é válido para $\mathbf{H}^3$.

I. Criar perspectivas de novos estudos em Geometria Diferencial para o aluno que está iniciando na pesquisa matemática.

Proposta de Conteúdo:

1. Definição do modelo do semi-espaço de Poincaré, de curvas diferenciáveis, de espaço tangente em cada ponto de $\mathbf{H}^3$ e de produto interno em cada espaço tangente (produto interno induzido pela estrutura de Geometria Hiperbólica). Ângulo entre curvas geodésicas.
2. Definição de comprimento de curva e de derivada covariante em $\mathbf{H}^3$. Verificação de que as retas hiperbólicas são geodésicas e que minimizam distância. Verificação de que os planos hiperbólicos são superfícies totalmente geodésicas com curvatura Gaussiana -1. Conceitos básicos de um estudo de superfícies, como aplicação de Gauss, curvaturas principais e direções principais, curvatura de Gauss e curvatura média, etc.. Determinação das superfícies umbílicas de $\mathbf{H}^3$.
3. Sistemas de coordenadas esféricas e cilíndricas em $\mathbf{H}^3$. Decomposições de $\mathbf{H}^3$.
4. Definição e análise das superfícies de rotação e dos cones. Determinação das curvas de rumo de uma superfície de rotação e da projeção de Mercator (é possível navegar no espaço hiperbólico?). Estudo de superfícies de rotação mínimas.
5. Perspectivas: Extensão do estudo para o espaço esférico. Formalização da noção de coordenadas esféricas e cilíndricas através da noção de *produto warped*. Extensão do estudo das superfícies de rotação através das isometrias de $\mathbf{H}^3$. Extensão da noção de superfícies de rotação e de cones para as formas espaciais de dimensão maior do que 3. Listagem de artigos de pesquisa relativamente recentes que lidam com objetos tratados neste curso.

Observação: Como esta é uma proposta de um mini-curso para um evento curto e existe uma preocupação com o aspecto didático do texto, pode ser necessário alterar alguma parte do conteúdo proposto em função de eventual exagero no volume do material escrito.

Benefícios esperados:

1. Desenvolver um uma intuição mais adequada para um futuro estudo da Geometria Riemanniana.
2. Revisão dos principais conceitos que normalmente são vistos em um curso de Geometria Diferencial das superfícies do $\mathbf{R}^3$.
3. Deixar o estudante mais bem preparado para um futuro estudo das variedades diferenciáveis.
4. Deixar o aluno mais motivado para se especializar na Área de Geometria Diferencial.

(Algumas) **Referências Bibliográficas:**

[1] Carmo, M. do, Geometrias Não-Euclidianas, *Matemática Universitária*, N. 6, pp 25-48, 1987.

[2] Carmo, M. do, Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, *SBM*, 2008.

[3] Carmo, M. do, Geometria Riemanniana, *IMPA*, 1988.

[4] Carmo, M. do, Dajczer, M., Rotation hypersurface in spaces of Constant curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 (2) (1983), 685-709.

[5] Hsiang, W. Y., Generalized rotational hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean Spaces. I. *J. Diff. Geom.*, 17 (1982), 337-356.

[6] Millman, R. S., Parker, G. D., Geometry, a Metric Aproch with Models, *Springer-Verlag*, 1991.

[7] Mori, H., Minimal Surfaces of Revolution in H^3 and Their Global Stability, *Indiana Univ. Math. J.*, 30 (5) (1981), 787-794.

[8] O´Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, *Academic Press*, 1983.

[9] O´Neill, B., Elementos de Geometria Diferencial, Editorial Limusa-Wiley, s.a., México, 1972.