
Generalização das Parábolas desde o Ponto de Vista dos Conjuntos Equidistantes

Kondo, Daniel Yoshie ^{*}
 Moraes, Wagner Augusto Almeida de [†]
 Moraes, Cássio Henrique Vieira [‡]
 Moretti Jr., Nilton César [§]
 Santos, Samuel Paulino dos [§]
 Zanardini, Aline [†]

Resumo

Neste trabalho revisitamos as cônicas, estudadas há mais de dois mil anos desde a Grécia Antiga com os trabalhos de Apolônio de Perga. Nosso objetivo é, sob certas condições, estabelecer um conceito de cônica generalizada como o lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois subconjuntos do plano. Nossa abordagem é a proposta em (PONCE M.; SANTIBÁÑEZ, 2014). Em especial, nos interessa como algumas propriedades particulares das parábolas podem ser traduzidas, de forma natural, para o conjunto equidistante de uma reta e um subconjunto não vazio do plano, que é convexo, compacto e não intersecta a reta. Estudamos o comportamento assintótico do que chamamos de parábola generalizada, bem como suas propriedades reflexivas. Igualmente importante é a convexidade. De fato a região do plano delimitada por qualquer cônica não degenerada é um conjunto convexo. Motzkin em (MOTZKIN, 1935) apresenta uma caracterização para subconjuntos fechados e convexos de \mathbb{R}^n em termos da função distância associada. Apresentamos uma prova construtiva da diferenciabilidade da função distância de um subconjunto fechado e convexo do plano, exibindo explicitamente seu gradiente. Como aplicação, mostramos que o conjunto equidistante entre dois subconjuntos disjuntos do plano, que são não vazios, convexos e fechados, é de classe C^1 .

1 Introdução

Estudadas há mais de dois mil anos, as cônicas eram vistas pelos geômetras da Grécia Antiga como a forma obtida da interseção de um plano e um cone duplo. Com o surgimento da geometria analítica introduzida por Descartes a caracterização de uma cônica por seus focos e sua diretriz tornou-se bastante natural. Uma belíssima construção, por vezes referida como ‘*esferas de Dandelin*’ permite estabelecer uma conexão entre as duas visões. Certamente, o estudo das cônicas proporcionou diversos avanços no desenvolvimento da Matemática, e da ciência em geral. É atribuído à Kepler como resultado de suas observações astronômicas que a trajetória descrita pelo movimento dos planetas é uma elipse, resultado posteriormente provado por Newton através de sua Lei de Atração Gravitacional. As cônicas estiveram presentes também no desenvolvimento da Geometria Projetiva e dão luz à resultados bonitos e interessantes ainda hoje estudados em áreas relativamente recentes da Matemática como a Geometria Algébrica, onde uma cônica é definida como o conjunto de zeros de um polinômio homogêneo de grau dois.

No presente trabalho, porém, nos interessa uma caracterização das cônicas um tanto quanto mais descritiva e que surge no seguinte contexto: Em um espaço métrico (\mathcal{M}, d) queremos estudar aqueles conjuntos cujos elementos são os pontos de \mathcal{M} que estão à igual distância de dois subconjuntos não vazios de \mathcal{M} fixados. Tais conjuntos são chamados de conjuntos equidistantes. No plano Euclidiano, \mathbb{R}^2 munido da métrica usual, sabemos, por exemplo,

^{*}Universidade de São Paulo, São Carlos-SP

[†]Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR

[‡]Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte-MG

[§]Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto-SP

que uma parábola é o conjunto dos pontos do plano à igual distância de um ponto fixado, seu foco, e de uma reta fixada, sua diretriz. Em geral, toda cônica não degenerada pode ser vista como o conjunto equidistante de dois círculos, se admitirmos os casos limites de um ponto e uma reta. Note que encontrar o conjunto equidistante de dois círculos é resolver o problema de determinar todos os círculos que são tangentes a estes dois círculos fixados. Isto nos dá, em certo sentido, uma caracterização dinâmica das cônicas. Por exemplo, se um círculo que se move é tangente a uma reta fixada (diretriz) e também passa por um ponto fixado, que não está na reta (foco), então o lugar geométrico descrito pela trajetória de seu centro é uma parábola. De fato se trocarmos um ponto por um círculo, o conjunto equidistante obtido é também uma parábola. Intuitivamente isto ocorre porque se olharmos para os dois conjuntos, a reta e o círculo, de um ponto no infinito, então o que veremos é um ponto e uma reta. Nosso objetivo é formalizar esta ideia e adaptá-la ao caso em que o “conjunto foco” é um subconjunto não vazio do plano, que é convexo e compacto. O conjunto equidistante obtido será o que chamamos de parábola generalizada. É claro que precisamos justificar o conceito de parábola generalizada. Veremos que as parábolas generalizadas possuem algumas propriedades geométricas comuns as parábolas “clássicas”.

É bem conhecido o suposto fato de que Arquimedes, usando a luz solar e espelhos, teria destruído uma frota de barcos romanos em Siracusa. O que não é mito é o fato de as cônicas possuírem propriedades reflexivas largamente utilizadas em receptores de sinais e instrumentos ópticos, por exemplo. Sabemos que se um feixe de luz incide paralelamente ao eixo de um espelho parabólico, então este é refletido passando pelo foco do espelho e, reciprocamente, se a luz incide sobre o foco, então esta é refletida paralelamente ao eixo. Mostraremos que as parábolas generalizadas, cujos “conjuntos foco” são conjuntos convexos, partilham desta propriedade. Especificamente, vamos mostrar que qualquer feixe de luz perpendicular à diretriz da parábola generalizada, ou seja, paralela ao eixo, é refletido passando pelo ponto do “conjunto foco” onde o ponto de reflexão realiza sua distância. Neste caso, mostramos também que a parábola generalizada obtida é convexa.

De fato convexidade é uma propriedade importante que estudamos, pois, em particular, a região do plano delimitada por qualquer cônica não degenerada é um conjunto convexo. É possível caracterizar um subconjunto fechado e convexo de \mathbb{R}^n em termos da função distância ao próprio conjunto (MOTZKIN, 1935). Apresentamos uma prova construtiva da diferenciabilidade da função distância de um subconjunto fechado e convexo do plano. Em particular, mostramos que o conjunto equidistante entre dois subconjuntos disjuntos do plano, que são não vazios, convexos e fechados, é de classe C^1 . Isto nos diz que as parábolas generalizadas são pelo menos de classe C^1 . Por outro lado, uma característica das parábolas clássicas que nos interessa, vistas como gráficos de funções quadráticas, é o fato de funções quadráticas possuírem primeira derivada ilimitada. A reta tangente em cada ponto da parábola cada vez mais se aproxima de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas à medida que nos afastamos da origem. É natural, portanto, estudar o comportamento assintótico das parábolas generalizadas. Mostraremos que toda parábola generalizada é assintótica a uma parábola clássica.

Esta ideia de estabelecer um conceito de cônica generalizada proposta em (PONCE M.; SANTIBÁÑEZ, 2014), usando o fato de que as cônicas clássicas (não degeneradas) podem ser vistas como os conjuntos equidistantes de dois círculos, nos diz que para conhecermos o comportamento do conjunto equidistante de dois subconjuntos disjuntos do plano, que são não vazios, e com algumas propriedades topológicas, é suficiente olharmos para os conjuntos de um ponto no infinito. Quando os dois conjuntos são conexos e compactos é possível mostrar, (PONCE M.; SANTIBÁÑEZ, 2014), que o conjunto equidistante é assintótico ao ramo de uma hipérbole, uma vez que no infinito está suficientemente próximo de duas retas. Portanto, tem sentido também o conceito de hipérbole generalizada. É também discutido em (PONCE M.; SANTIBÁÑEZ, 2014) uma possível generalização para elipses.

2 Definições

O objetivo desta seção é estabelecer alguns conceitos e notações que serão fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. Procuramos motivar o estudo dos conjuntos equidistantes e estudamos as principais propriedades da função distância a um conjunto, o que naturalmente nos leva à caracterização, atribuída à Motzkin (MOTZKIN, 1935), dos subconjuntos fechados e convexos do plano. Apoiados nesta caracterização apresentamos uma prova da diferenciabilidade da função distância de um subconjunto fechado e convexo do plano, que faz uso de argumentos geométricos bastante simples, mas bonitos. Este resultado nos será particularmente útil na próxima seção, onde buscamos estabelecer certas propriedades a cerca do que chamamos de parábola generalizada.

Ao longo do texto por vezes temos mencionado a palavra equidistante, à igual distância. Se queremos tornar precisa a definição de conjunto equidistante, então sob o ponto de vista formal, o ambiente em que iremos trabalhar é a estrutura de espaço métrico. No que segue, portanto, o espaço subjacente será \mathbb{R}^2 munido da métrica usual, que por vezes será referido simplesmente como plano.

É igualmente importante estabelecermos a ideia de distância entre conjuntos. Dados dois subconjuntos do plano A e B , definimos a distância entre A e B , que denotamos por $d(A, B)$, como sendo o ínfimo das distâncias entre os elementos de A e B . De forma precisa,

$$d(A, B) \doteq \inf\{|a - b|; a \in A, b \in B\}$$

Em particular, se $A = \{a\}$ é um ponto do plano, então temos bem definida a distância de um ponto a um conjunto.

Note ainda que $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$. De fato, como $A \subset \overline{A}$ e $B \subset \overline{B}$, então $d(\overline{A}, \overline{B}) \leq d(A, B)$. Por outro lado, dados $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$ existem seqüências $\{a_n\} \subset A$ e $\{b_n\} \subset B$ tais que $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$. Logo, $\lim |a_n - b_n| = |a - b|$ e, portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ tem-se $|a_n - b_n| \leq |a - b| + \varepsilon$, o que nos diz que $\inf |a_n - b_n| \leq |a - b|$ e, portanto, $d(A, B) \leq d(\overline{A}, \overline{B})$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. Definimos a seguinte função $d_A : \mathbb{R}^2 \setminus A \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $d_A(x) = d(x, A)$, e queremos estudar suas propriedades. Como pela observação anterior, temos que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$, podemos assumir A fechado.

Note que se para cada $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ existe um único $a \in A$ tal que $d(x, A) = |x - a|$, então tem sentido definirmos uma função $p_A : \mathbb{R}^2 \setminus A \rightarrow \partial A$ que a cada ponto x do plano, fora do conjunto A , associa o único ponto $p_A(x) = a \in A$ tal que $d_A(x) = |x - a| = |x - p(x)|$. Aqui ∂A denota a fronteira de A .

Provemos agora o seguinte resultado que diz respeito ao comportamento da função d_A quando A é fechado.

Proposição 1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ fechado, $A \neq \emptyset$, então d_A é uniformemente contínua.*

Demonstração: É suficiente mostrarmos que neste caso d_A é Lipschitz contínua, com constante de Lipschitz igual a 1 (um). De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ existem $a, b \in A$ tais que $d_A(x) = |x - a|$ e $d_A(y) = |y - b|$, pois A é fechado. Assim, $|y - b| \leq |y - a| \leq |x - y| + |x - a|$ donde, $d_A(y) \leq |x - y| + d_A(x)$, o que implica $|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$. ■

Agora, dados dois subconjuntos fechados do plano queremos saber quais são as condições necessárias para que a distância entre os conjuntos seja exatamente a distância entre dois de seus elementos. Temos o seguinte resultado:

Proposição 2. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^2$ fechados e não vazios. Se A ou B é limitado, então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $d(A, B) = |a - b|$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor A limitado. Existem seqüências $\{a_n\} \subset A$ e $\{b_n\} \subset B$ tais que $d(A, B) = \lim |a_n - b_n|$, com $|a_n - b_n| < d(A, B) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Como A é compacto, a menos de passarmos a uma subsequência, podemos supor que $(a_n) \rightarrow a \in A$. Além disso, (b_n) é limitada, pois $|a - b_n| \leq |a_n - b_n| + |a_n - a| < d(A, B) + \frac{1}{n} + \varepsilon$. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, como B é fechado podemos assumir $(b_n) \rightarrow b \in B$, donde $\lim_n |a_n - b_n| = |a - b| = d(A, B)$. ■

Agora que estamos familiarizados com o conceito de distância entre conjuntos e conhecemos algumas das propriedades da função distância de um conjunto, passamos ao estudo dos conjuntos equidistantes, aqueles cujos elementos são os pontos do plano que estão à igual distância de dois subconjuntos não vazios de \mathbb{R}^2 fixados. Dados $A, B \subset \mathbb{R}^2$ não vazios, denotamos o conjunto equidistante de A e B por $\{A = B\}$. Em símbolos,

$$\{A = B\} \doteq \{x \in \mathbb{R}^2; d_A(x) = d_B(x)\}$$

Naturalmente podemos estender a notação para $\{A < B\}$, que denota o conjunto dos pontos do plano mais próximos de A do que de B . E, analogamente, para $>, \leq$ e \geq .

Para um estudante de Matemática, ou amante desta ciência, a busca por respostas à questões como a de caracterizar, topologicamente, por exemplo, os conjuntos que se realizam como o conjunto equidistante de outros dois conjuntos, entender o contexto em que um conjunto equidistante se realiza como curva plana ou procurar um algoritmo para construir o conjunto equidistante de dois conjuntos dados; já é suficientemente atraente e em geral desafiadora. Mas, para os menos entusiastas eis uma situação real e bastante atual onde aparece a ideia de equidistância, ou se preferir “justiça”. Historicamente a busca por métodos precisos para a representação de porções da superfície terrestre, em especial limites geopolíticos, tem ocupado o intelecto humano e é uma das motivação por trás das ciências geodésicas. No entanto, mais do que objeto de estudo, demarcações de limites territoriais estiveram, e estão, presentes como pano de fundo em disputas entre civilizações, tribos, países; algumas violentas, como a Guerra do Contestado, a Guerra da Tríplice Aliança ou a Guerra da Cisplatina e outras mediadas por organizações como a ONU, dentre as quais destacamos o embate atual entre Chile e Peru para estabelecer suas fronteiras marítimas no Oceano Pacífico. O fato é, que a menos de questões históricas, é razoável estabelecer uma tal limitação pela ‘linha equidistante’ entre os dois países. Mas como determiná-la? Em questões como essa, embora um modelo mais adequado para a representação da superfície terrestre seja uma esfera, os países podem ser vistos como subconjuntos do plano e, em geral, esta ‘linha equidistante’ é dada por alguma curva plana. E, portanto, é de interesse estudar situações em que as curvas planas aparecem como conjunto equidistante, bem como é importante estudar as propriedades que certos conjuntos equidistantes possuem.

A primeira observação que fazemos é o fato de podermos considerar dois subconjuntos A e B não vazios do plano como sendo fechados, pois, como dito anteriormente, é verdade que $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$, e portanto, $\{A = B\} = \{\overline{A} = \overline{B}\}$. Também é notável que podemos escrever $\{A = B\}$ como a imagem inversa do conjunto $\{0\}$, que é fechado, pela função $d(x, A) - d(x, B)$ donde, a continuidade de d implica que $d^{-1}(0) = \{A = B\}$ é fechado.

Embora, intuitivamente, seja razoável esperar que as regiões do plano $\{A < B\}$ e $\{B < A\}$ estejam separadas pela “curva” $\{A = B\}$, este fato em geral não é verdadeiro. Consideremos os conjuntos $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\}$ e $B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}$, então $\{A = B\} = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0\}$, cujo interior é não vazio.

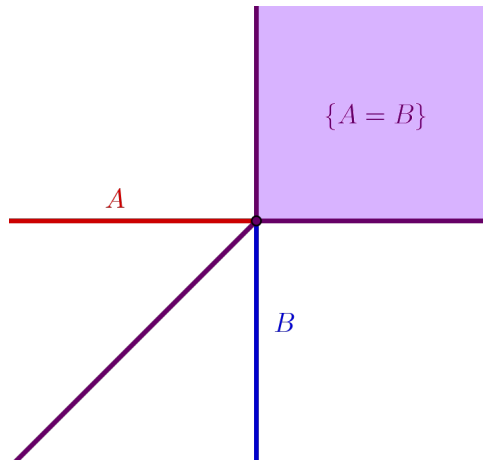


Figura 1: $\{A = B\}$ tem interior não vazio

Formalmente temos o seguinte resultado.

Proposição 3. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^2$ não vazios, fechados e disjuntos. Então $\{A = B\}$ tem interior vazio.*

Demonstração: Dado $x \in \{A = B\}$, queremos mostrar que x é um ponto isolado. Sejam a, b pontos de A e B , respectivamente, tais que $|x - a| = |x - b| = d(x, A) = d(x, B)$. Tais pontos existem, pois A e B são fechados. Note que $a \neq b$, pois $A \cap B = \emptyset$. Vamos mostrar que os pontos do segmento $(x, a) \doteq \{y \in \mathbb{R}^2; y = t \cdot x + (1-t) \cdot a, t \in (0, 1)\}$ estão mais próximos de A do que de B . De fato, podemos traçar uma circunferência τ de raio $|x - a|$ e centro em x que toca os conjuntos A e B ao menos nos pontos a e b . Note que não existe nenhum ponto de $A \cup B$ no interior de τ . Tomando um ponto y no segmento (x, a) , sabemos que $d(y, a) < d(x, a)$. Assim, ao traçarmos uma circunferência π de raio $d(y, a)$ com centro em y teremos que π está completamente no interior de τ , exceto pelo ponto a de tangência interna, donde $y \in \{A < B\}$. Observamos que esta prova depende diretamente do fato dos discos na norma euclidiana serem estritamente convexos. ■

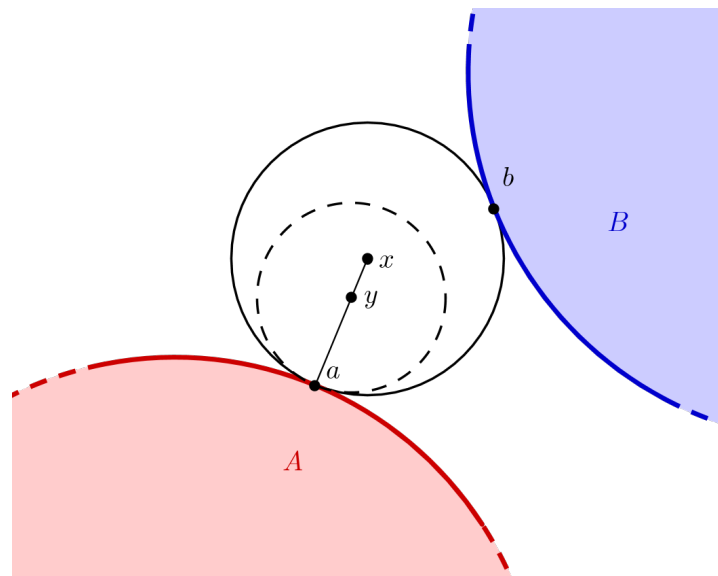


Figura 2: $\{A = B\}$ tem interior vazio

Dentre a classe de conjuntos que estão sob as hipóteses do resultado acima destacamos a dos círculos, cujos traçados são bastante simples e que nos servirão como motivação para nossa revisita as cônicas, um dos objetivos deste trabalho. De fato toda cônica não degenerada pode ser vista como o conjunto equidistante de dois círculos, se admitirmos os casos limites de um ponto e uma reta. Seja $A = \{a\}$ um ponto no plano. Se B é uma reta que não contém A , então $\{A = B\}$ é uma parábola com foco em A e reta diretriz dada por B . Suponhamos agora que B é um círculo. Se A está no interior de B , então $\{A = B\}$ é uma elipse com focos em A e no centro de B . Por outro lado, se A está no exterior de B , então $\{A = B\}$ é o ramo de uma hipérbole com focos em A e no centro de B .

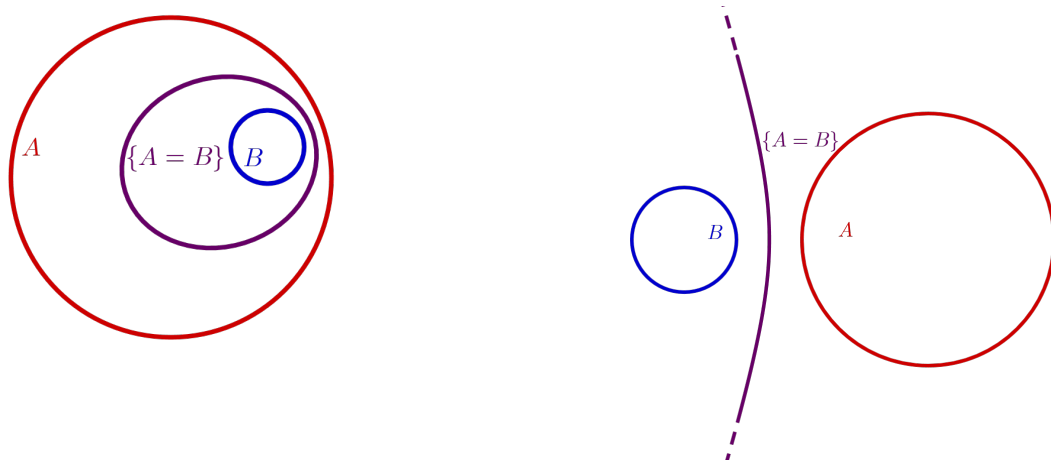


Figura 3: O equidistante entre duas circunferências

Uma forma de enxergar o problema de encontrar o conjunto equidistante de dois círculos é olhar para “outra” questão, a de determinar todos os círculos que são tangentes a estes dois círculos fixados. Problemas de tangência são conhecidos desde a Grécia Antiga e alguns, como o Problema de Apolônio, ocuparam por muito tempo mentes matemáticas como as de François Viète e René Descartes.

Seja $A = \{a\}$ um ponto no plano. Suponhamos que B é um círculo. Se A está no interior de B , então $\{A = B\}$ é uma elipse com focos em A e no centro de B . Por outro lado, se A está no exterior de B , então $\{A = B\}$ é o ramo de uma hipérbola com focos em A e no centro de B . Agora, se B é uma reta que não contém A , então $\{A = B\}$ é uma parábola com foco em A e reta diretriz dada por B . De fato neste último caso podemos trocar o ponto por um círculo e o conjunto equidistante obtido é também uma parábola. Intuitivamente isto ocorre porque se olhamos para os dois conjuntos, a reta e o círculo, de um ponto no infinito, então o que veremos é um ponto e uma reta. Como nosso objetivo é formalizar esta ideia, e adaptá-la ao caso em que o “conjunto foco” é um subconjunto não vazio do plano, que é convexo e compacto, precisamos estabelecer alguns resultados que dizem respeito à convexidade e regularidade dos conjuntos equidistantes.

Como vimos anteriormente, dados um conjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^2$ e um ponto $x \notin A$, existe ao menos um ponto a de A tal que $d(x, A) = |x - a|$. Vamos caracterizar os subconjuntos fechados A do plano para os quais o ponto a é único.

Temos o seguinte resultado atribuído a Motzkin (MOTZKIN, 1935)

Proposição 4. *Dado um subconjunto A fechado do plano, definamos a seguinte lei de associação $p : \mathbb{R}^2 \setminus A \rightarrow \partial A$ que a cada ponto x do plano, fora do conjunto, associa um ponto $p(x) = a \in A$ tal que $d_A(x) = |x - a| = |x - p(x)|$. São equivalentes:*

- (i) p está bem definida como função e é contínua;
- (ii) A é convexo.

Demonstração: Começamos provando a implicação (i) \Rightarrow (ii). Afirmamos que a função $x \mapsto p(x)$ é contínua. De fato, seja $\{x_n\}$ uma sequência de pontos de \mathbb{R}^2 tal que $x_n \rightarrow x$. Queremos mostrar que $p(x_n) \rightarrow p(x)$. Note que $p(x_n)$ é limitada e, logo, admite subsequência $p(x_{n_k})$ convergente. Além disso, como A é fechado, $p(x_{n_k}) \rightarrow y \in A$. Assim,

$$|x - y| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - p(x_{n_k})| = \lim_{k \rightarrow \infty} d_A(x_{n_k}) = d_A(x)$$

e, portanto, $y = p(x)$. Prosseguindo, é fácil ver que se $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, então $p(x) = p(y)$, $\forall y \in [x, p(x)] \doteq \{y \in \mathbb{R}^2; y = \lambda x + (1 - \lambda)p(x), \lambda \in [0, 1]\}$, pois

$$|x - p(y)| \leq |x - y| + |y - p(y)| \leq |x - y| + |y - p(x)| = |x - p(x)|$$

donde, $p(x) = p(y)$. Agora, vamos mostrar que $p(x) = p(y)$ para todo y na semirreta s com origem em $p(x)$ passando por x , para cada $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Seja $S \doteq \{y \in s; p(y) = p(x)\}$. Há duas possibilidades, ou S é um intervalo da forma $[y, p(x))$ para algum y , ou $S = s$. Mostremos que a primeira possibilidade não ocorre. Se ocorresse, poderíamos tomar $\{y_n\} \subset s \setminus S$ uma sequência convergente para y , mas $p(y_n)$ não convergiria para $p(y)$, contrariando a continuidade de p . Isto porque $p(y_n)$ está em um dos semiplanos determinados pela reta perpendicular a s em y que não contém $p(x)$.

Concluimos, portanto, que para cada $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ todo ponto y na semirreta com origem em $p(x)$ passando por x é tal que $p(x) = p(y)$. Logo, a bola aberta $B_y = B(y; |y - p(x)|)$ é disjunta de A . A medida que y se torna ilimitado, obtemos uma reta por $p(x)$ com vetor normal $x - p(x)$ que separa x de A , e portanto, A é convexo.

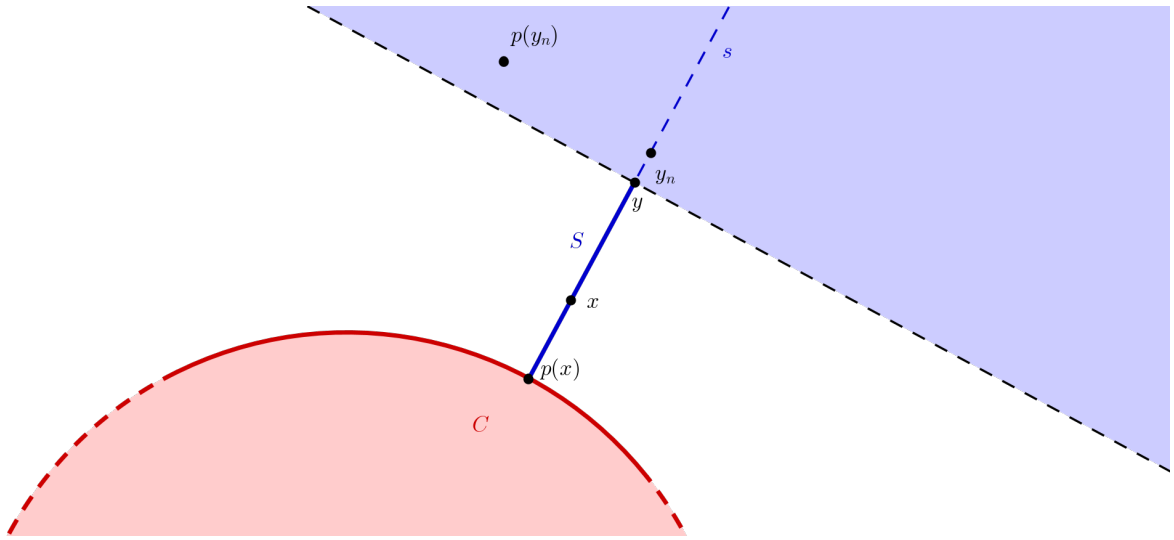


Figura 4: p é contínua

Agora, provemos a recíproca ((ii) \Rightarrow (i)). Tomemos $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Seja z um ponto de A cuja distância a x é mínima. Vamos mostrar que $\forall y \in A, y \neq z$ tem-se $|x - z|^2 < |x - y|^2$. De fato, como A é convexo, qualquer que seja $\varepsilon \in [0, 1]$ tem-se $z + \varepsilon(y - z) \in A, \forall y \in A, y \neq z$. Logo,

$$|x - z|^2 \leq |x - z - \varepsilon(y - z)|^2 = |x - z|^2 - 2\varepsilon \langle y - z, x - z \rangle + \varepsilon^2 |y - z|^2 \quad (*)$$

Agora, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos $\langle y - z, x - z \rangle \leq 0$. Por outro lado,

$$|x - y|^2 = |x - z - y + z|^2 = |x - z|^2 - 2 \langle x - z, y - z \rangle + |y - z|^2$$

e, portanto, de (*) tomando $\varepsilon = 1$ segue que $|x - y|^2 > |x - z|^2, \forall y \in A, y \neq z$. \blacksquare

Esta caracterização nos será útil na demonstração do resultado que será apresentado a seguir. A ideia é verificar a diferenciabilidade da função distância para um conjunto convexo e fechado do plano exibindo um candidato bastante natural a gradiente. Nos valem do fato que a direção do gradiente nos diz qual é a direção de maior crescimento da função.

3 A função distância e suas propriedades de diferenciabilidade

Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ não vazio e fechado. A Proposição anterior nos diz que a função $p : \mathbb{R}^2 \setminus C \rightarrow \partial C$, está bem definida se, e somente se, C é convexo. Daqui em diante, assumiremos que C é convexo e fechado e, portanto p está bem definida como função. Lembremos que associada a C temos também a função $d_C : \mathbb{R}^2 \setminus C \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $d_C(x) = |x - p(x)|$. Quando não houver ambigüidade, indicaremos tal função apenas por d .

Sob certas condições, o conjunto C junto com as funções p e d nos permite descrever os elementos de $\mathbb{R}^2 \setminus C$ de maneira semelhante ao que ocorre em sistemas de coordenadas polares. Mais precisamente, a associação $x \leftrightarrow (p(x), d(x))$ é biunívoca, pois em certo sentido existe uma bijeção entre $\partial C \times \mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Para isso, precisamos de uma espécie de injetividade de p : Se x, y e $p(x)$ não são colineares, então $p(y) \neq p(x)$. E, sendo C convexo e fechado, p é sobrejetiva sobre ∂C . De fato, é possível estender esta bijeção a um difeomorfismo, porém essa análise foge do escopo desse artigo. O que é importante, é entendermos cada ponto $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ como uma direção. Isto é, a direção "radial" dada pelo vetor $x - p(x)$. Note que esta direção radial é a direção de afastamento mais rápido de C . Esta é a motivação para o resultado que provamos a seguir.

Teorema 1. *Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ não vazio e fechado. Se C é convexo, então a função $d_C : \mathbb{R}^2 \setminus C \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $d_C(x) = |x - p(x)|$ é continuamente diferenciável. Além disso $\nabla d_C(x) \cdot h = \left\langle \frac{x - p(x)}{|x - p(x)|}, h \right\rangle$ para todo $h \in \mathbb{R}^2 \setminus C$.*

Demonstração: Começamos nosso argumento pela observação de que o vetor $x - p(x)$ nos diz qual é a direção de afastamento mais rápido do conjunto C e, portanto, para que d tenha alguma chance de ser diferenciável em algum ponto $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, a direção de ∇d deve ser dada pela direção do vetor $x - p(x)$. Como d expressa distância, sua velocidade de crescimento é unitária em todo ponto. Assim, consideremos o campo vetorial $\nabla d(x) = \frac{x - p(x)}{|x - p(x)|}$ e provemos que de fato este é o gradiente de d donde, pela continuidade da função p , segue diretamente que a função d é continuamente diferenciável.

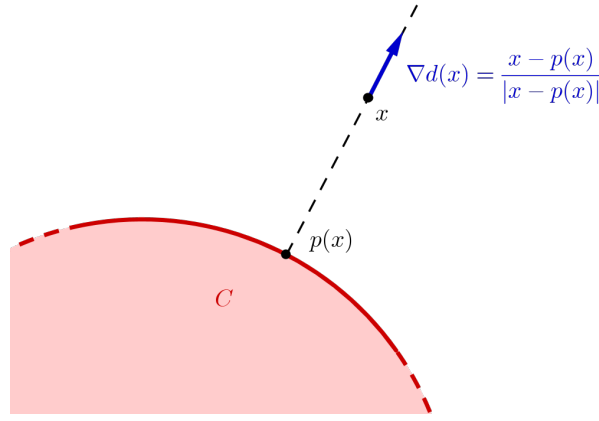


Figura 5: O gradiente de d

A demonstração que apresentamos aqui é construtiva e faz uso de um argumento geométrico bastante simples, a Lei dos Cossenos. É conveniente considerarmos a função d^2 . Uma vez verificada a diferenciabilidade de d^2 , segue diretamente da regra da cadeia que a função d é também diferenciável. Devemos mostrar, portanto, que $2d \cdot \nabla d$ é o gradiente de d^2 , onde ∇d é o campo vetorial definido acima. Observamos que d é estritamente positiva.

Fixemos um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Dado um vetor unitário v , queremos nos aproximar de x_0 ao longo da reta $x_0 + tv$. Agora, para cada t seja $E(t)$ a distância entre os pontos $x_0 + tv$ e $p(x_0)$. Então $d(x_0 + tv)^2 \leq E(t)^2$. Além disso, se α é o ângulo formado entre os vetores v e $x_0 - p(x_0)$, no triângulo de vértices $x_0, p(x_0)$ e $x_0 + tv$, então pela Lei dos Cossenos, segue que

$$E(t)^2 = d(x_0)^2 + t^2 + 2td(x_0) \cos \alpha$$

E, portanto, como $E(t)^2 \geq d(x_0 + tv)^2$ e $\cos \alpha = \langle \nabla d(x_0), v \rangle$ temos que:

$$\frac{d(x_0 + tv)^2 - d(x_0)^2}{t} \leq \frac{E(t)^2 - d(x_0)^2}{t} = t + 2d(x_0) \langle \nabla d(x_0), v \rangle \quad (1)$$

Por outro lado, para cada t seja k_t o ponto do segmento $[x_0 + tv, p(x_0 + tv)]$ tal que o ângulo entre os pontos $k_t, p(x_0)$ e x_0 é reto e definamos ainda $e(t)$ como sendo a distância entre k_t e $x_0 + tv$; e $\delta(t) = |x_0 - k_t|$.

Sabemos que existe um tal k_t porque o ângulo entre $x_0, p(x_0)$ e $p(x_0 + tv)$ não pode ser agudo. Além disso, $k_t \rightarrow p(x_0)$ quando $t \rightarrow 0$, o que nos diz que se $\beta(t)$ é o ângulo entre k_t, x_0 e $p(x_0)$, então $\beta(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ e também que $\delta(t) \rightarrow d(x_0)$. Ademais, $\alpha(t) \rightarrow \pi - \alpha$, onde $\alpha(t)$ é o ângulo entre k_t, x_0 e $x_0 + tv$. Observe ainda que $e(t)^2 \leq d(x_0 + tv)^2$ e que $-\delta(t)^2 \leq -d(x_0)^2$.

Finalmente, pela Lei dos Cossenos aplicada ao triângulo de vértices x_0, k_t e $x_0 + tv$ obtemos:

$$e(t)^2 = \delta(t)^2 + t^2 - 2t\delta(t) \cos \alpha(t)$$

Logo,

$$t - 2\delta(t) \cos \alpha(t) = \frac{e(t)^2 - \delta(t)^2}{t} \leq \frac{d(x_0 + tv)^2 - d(x_0)^2}{t} \quad (2)$$

E, portanto, de (1) e (2) obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x_0 + tv)^2 - d(x_0)^2}{t} = 2d(x_0) \langle \nabla d(x_0), v \rangle$$

Observamos que o único caso não coberto por essa demonstração é aquele em que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, isto é, quando v é paralelo a $\nabla d(x_0)$. Entretanto, esses casos são trivialmente verificados. ■

Como consequência direta deste resultado obtemos uma caracterização do conjunto equidistante entre dois subconjuntos disjuntos do plano que são não vazios, fechados e convexos.

Corolário 1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^2$ não vazios, disjuntos, fechados e convexos. Então $\{A = B\}$ é de classe C^1 .*

Demonstração: Consideremos a função dada por $f(x) = d_A(x) - d_B(x)$. Então, pelo Teorema anterior f é de classe C^1 . Agora, sendo $\{A = B\} = f^{-1}\{0\}$, como 0 é valor regular de f segue, pelo Teorema da Função Implícita que $\{A = B\}$ é de classe C^1 , no sentido que é localmente o gráfico de uma função de classe C^1 . Verifiquemos que 0 é de fato valor regular de f . Temos $\nabla f(x) = 0 \iff \nabla d_A(x) = \nabla d_B(x)$. Suponhamos $\nabla d_A(x) = \nabla d_B(x)$, então $p_A(x) = p_B(x)$, contradizendo o fato de serem A e B disjuntos. ■

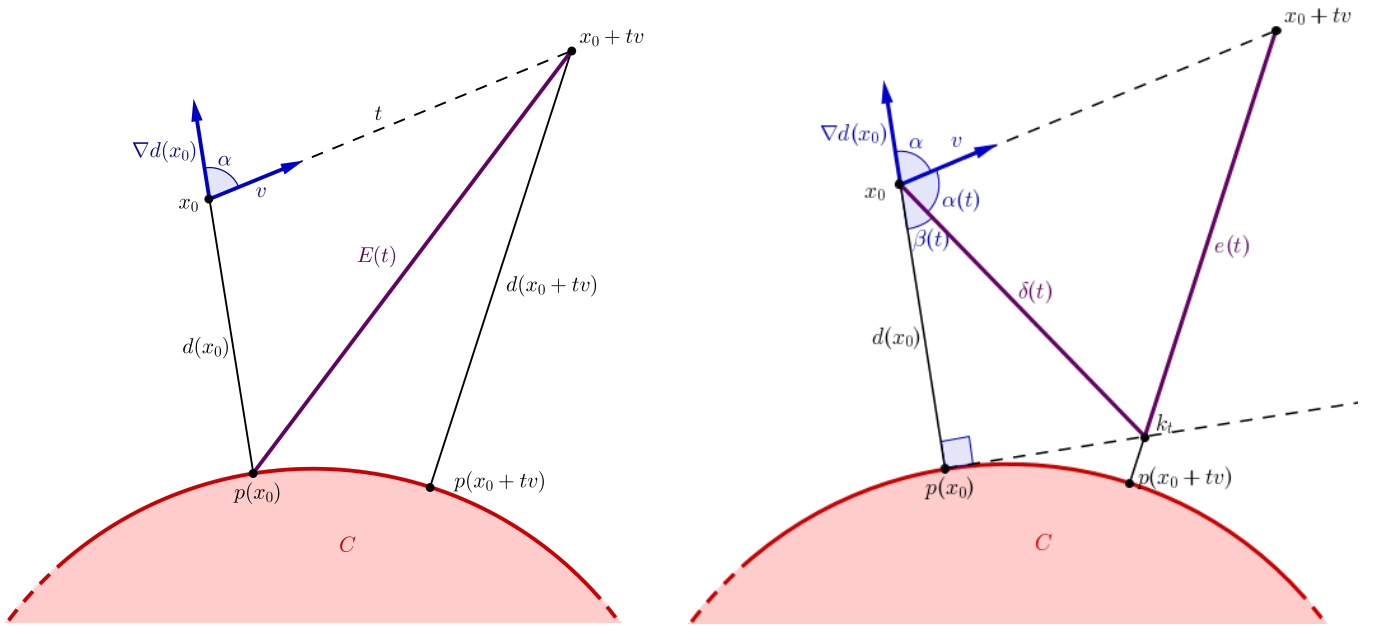


Figura 6: d é C^1

Como antes, seja $C \subset \mathbb{R}^2$ não vazio, fechado e convexo. Note que para todo $t > 0$, temos que t é um valor regular da função $d_C = d$, uma vez que para pontos $x \in d^{-1}\{t\}$, temos $x \neq p(x)$, logo, $\nabla d(x) \neq 0$. Assim, utilizando o Teorema da Função Implícita, garantimos que $d^{-1}\{t\}$ é uma curva de classe C^1 . Mesmo que a função d não esteja definida em C , se nós a estendermos para ∂C , teríamos que $d^{-1}\{0\} = \partial C$, que sabemos que é uma curva contínua.

Podemos relacionar este fato com o que acontece ao resolver o problema da equação do calor:

$$\begin{cases} u_t - \beta u_{xx} = 0, & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & & 0 < x < L. \end{cases}$$

onde $\beta > 0$ e u_0 é contínua e u_0' é contínua por partes.

Neste caso, existe uma solução $u \in C([0, L] \times [0, \infty]) \cap C^\infty(]0, L[\times]0, \infty[)$. Observe que a solução u em $t > 0$ é uma solução suave, mesmo que inicialmente ($t = 0$) não o seja. Este fato é conhecido como o *efeito regularizante* da equação do calor (FIGUEIREDO, 1977).

Vejam também que este resultado é o melhor que podemos obter sob as hipóteses que temos. De fato, considerando $C = [x, y]$ um segmento no plano, as curvas de nível de $d_C^{-1}(t)$, $t > 0$ são uniões de segmentos de reta com arcos de circunferência. Dessa forma, embora exista uma tangente, no ponto de colagem a curvatura muda de 0 para $\frac{1}{t}$. Ou seja, d_C não é C^2 . O mesmo ocorre quando C é um polígono convexo.

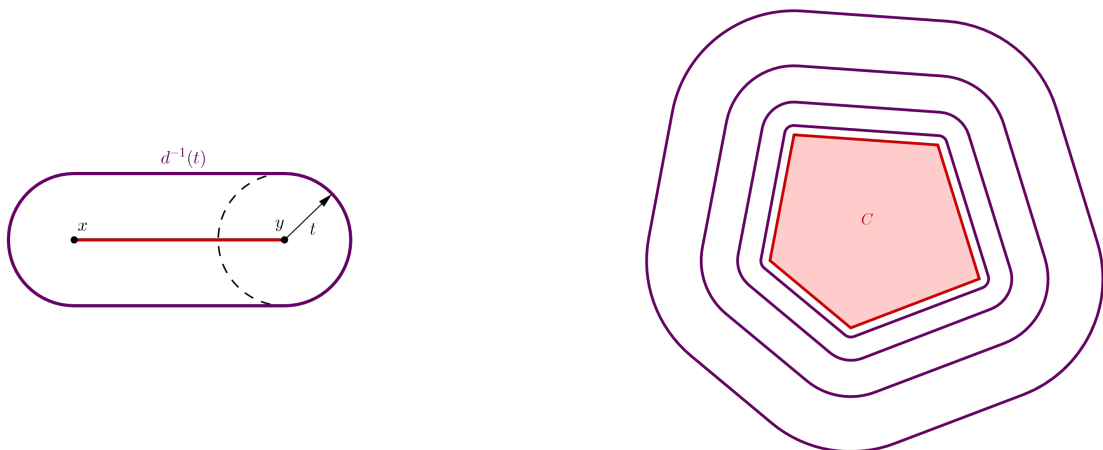


Figura 7: Curvas de nível de d para C um segmento e um polígono convexo

4 Parábolas Generalizadas

Começamos esta seção abordando um problema geométrico bastante conhecido cuja solução ilustra uma propriedade comum às cônicas não degeneradas: a propriedade reflexiva, ou propriedade de rebote.

O problema é enunciado da seguinte maneira: Dados uma reta r e A e B dois pontos distintos e não pertencentes à reta, com A e B num mesmo semiplano, queremos determinar o caminho mais curto entre A e B passando por r .

Sabemos que, no plano, o caminho mais curto entre dois pontos distintos é dado pelo segmento de reta que os une. Se efetuamos a reflexão de B pela reta r obtemos um ponto B' no semiplano determinado por r que não contém nem A nem B . O caminho mais curto entre A e B' intersecta a reta r digamos num ponto P . Assim, se queremos ir de A até B passando por r e pelo caminho de menor comprimento, basta considerar a poligonal $A - P - B$.

Sabemos que se um feixe de luz incide paralelamente ao eixo de um espelho parabólico, então este é refletido passando pelo foco do espelho e, reciprocamente, se a luz incide sobre o foco, então esta é refletida paralelamente ao eixo. Se definimos uma parábola generalizada como sendo o conjunto equidistante entre uma reta e um subconjunto do plano, que é não vazio, convexo e compacto (conjunto foco), então esta é uma das propriedades que as parábolas generalizadas devem possuir para que esta seja uma boa definição. Nesta seção nos dedicamos a apresentar esta generalização da ideia de parábola como algo bastante natural. A abordagem que seguimos é a proposta em (PONCE M.; SANTIBÁÑEZ, 2014).

Mostraremos que toda parábola generalizada não só verifica esta propriedade de rebote como também delimita uma região do plano que é convexa. Além disso, sempre é assintótica a uma parábola clássica.

4.1 Sobre Convexidade e Reflexividade

Observamos que como consequência do Teorema 1 apresentado na seção anterior toda parábola generalizada é de classe C^1 , isto é, localmente é o gráfico de uma função de classe C^1 . Com efeito, como toda reta é convexa e fechada, da definição de parábola generalizada, estamos sob as hipóteses do Corolário 1. O conteúdo do próximo resultado nos diz algo mais a cerca das parábolas generalizadas vistas como gráficos de funções.

Proposição 5. *Toda parábola generalizada delimita uma região do plano que é convexa.*

Demonstração: Consideremos uma parábola generalizada c . Seja x um ponto de c e sejam $p_A(x)$ e $p_B(x)$ os pontos em que x realiza a distância na reta diretriz A e no conjunto foco B , respectivamente. Sem perda de generalidade podemos supor que a reta coincide com o eixo das abscissas, pois c , vimos, é localmente o gráfico de uma função de classe C^1 . Seja r a reta perpendicular ao segmento $[x, p_A(x)]$ que passa pelo ponto $p_A(x)$, então r intersecta o eixo $-x$ em um ponto z . Como o conjunto foco é convexo, a reta r divide o plano em dois semiplanos de modo que $\text{int } B$ está inteiramente contido em um único semiplano. Seja agora s a reta determinada pelos pontos x e z . Como os triângulos $\triangle xp_A(x)z$ e $\triangle xp_B(x)z$ são congruentes temos que s é a bissetriz do ângulo $\angle p_A(x)zp_B(x)$. Mostremos que não há pontos de c em $\{r < \text{eixo} - x\}$. Suponha que existe $y \in c$ tal que $y \in \{r < \text{eixo} - x\}$ e, como B é convexo e fechado, existe um único $b \in B$ que realiza a distância de y . Neste caso, $y \notin r$, absurdo, pois $d(y, b) > d(y, \text{eixo} - x)$. Portanto $c \subset \{r \geq \text{eixo} - x\}$, ou seja, c é convexa.

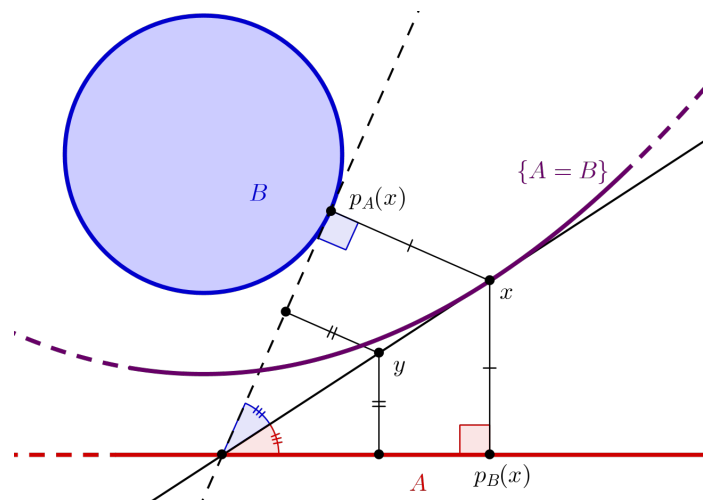


Figura 8: Convexidade

■

Corolário 2. Um feixe de luz ao incidir perpendicularmente na parábola generalizada c , é refletido no conjunto foco no ponto em que o ponto de reflexão realiza sua distância, onde abstraímos a parábola generalizada considerando-a como um espelho.

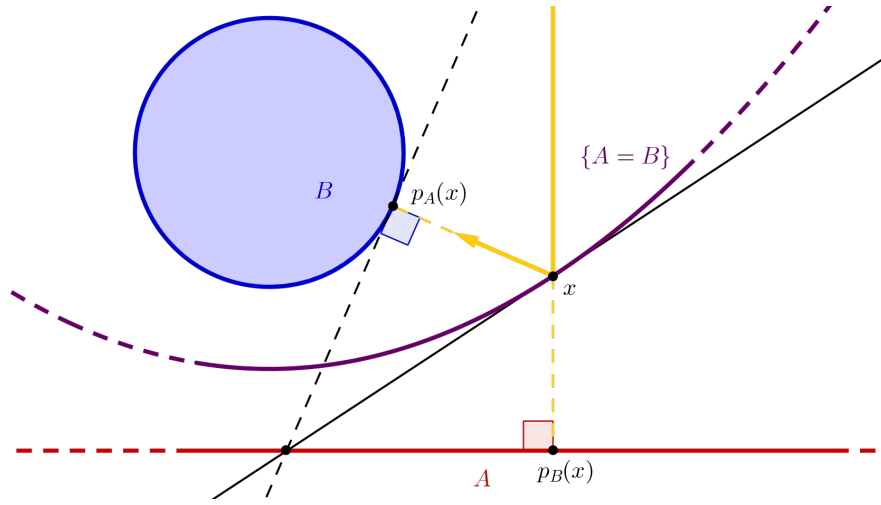


Figura 9: Rebote

Demonstração: Basta observar que pela construção anterior, a reta s é a tangente de c no ponto x e que, além disso, os ângulos $\angle p_A(x)xz$ e $\angle p_B(x)xz$ são iguais e, portanto, o ângulo de incidência é igual a $\angle p_B(x)xz$, pois são opostos por um vértice. Assim, o feixe é refletido justamente no ponto do conjunto foco no qual realiza a distância ao ponto de reflexão. ■

4.2 Comportamento Assintótico

Abordaremos agora uma outra propriedade das parábolas generalizadas. Já vimos que se o conjunto K for convexo, então o equidistante $\{\mathbb{R} = K\}$ é de classe C^1 . Ao assumir apenas a compacidade e conexidade do conjunto K , veremos que $\{\mathbb{R} = K\}$ possui um comportamento assintótico à parábola de diretriz \mathbb{R} e tendo como foco F , o ponto mais alto de K . Intuitivamente falando, ao olhar desde o infinito, enxergamos apenas F e \mathbb{R} , ou seja, o equidistante coincide com a parábola no infinito. Caso o conjunto não possua apenas um ponto mais alto, o comportamento será assintótico com duas parábolas cujos focos serão aqueles mais a direita e mais a esquerda. Para provar este teorema, precisaremos dos seguintes lemas técnicos.

Lema 1. Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto e $A = (x_0, y_0)$ tal que $x < x_0$ e $y \leq y_0, \forall (x, y) \in K$. Fixado $P = (x_0, y_1)$ tal que $y_1 > y_0$, a função

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto d(P_t, K) \end{aligned}$$

é crescente, onde $P_t = P + t(1, 0)$.

Demonstração:

Considere $0 < t_1 < t_2$, queremos mostrar que $d(P_{t_1}, K) < d(P_{t_2}, K)$. Seja $Q_2 \in K$ o ponto que realiza a distância do ponto P_{t_2} a K , ou seja, $d(P_{t_2}, Q) = d(P_{t_2}, K)$. Assim,

$$d(P_{t_1}, K) \leq d(P_{t_1}, Q_2) < d(P_{t_2}, Q_2) = d(P_{t_2}, K),$$

em que a primeira desigualdade segue da definição de $d(P_{t_1}, K)$ e a segunda do Teorema de Pitágoras.

Portanto $d(P_{t_1}, K) < d(P_{t_2}, K)$, logo φ é crescente. ■

Lema 2. Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto e suponhamos que existem $F = (x_F, y_F) \in K$ e $\varepsilon > 0$ com a propriedade que $y < y_F$ e $x \leq x_F + \varepsilon$ para todo $(x, y) \in K$. Considere uma reta $l: y = \alpha$, cujo $\alpha < y_F, \forall (x, y) \in K$ e seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto na parábola de foco F e diretriz l . A função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto d(P_t, l) - d(P_t, K), \end{aligned}$$

onde $P_t = P_0 + t(1, 0)$, possui um único zero t^* e, além disso, $t^* \in [0, \varepsilon)$.

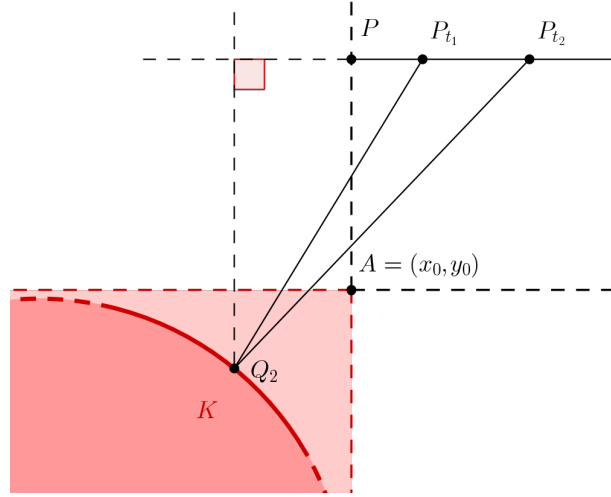


Figura 10: Lema 1

Demonstração: A função f acima definida é contínua, uma vez que a função distância é contínua. Como $d(P_t, l)$ é constante e $d(P_t, K)$ é crescente, pelo Lema 1, a função f é decrescente. Além disso, notemos que:

- $f(0) = d(P_0, l) - d(P_0, K) \geq 0$;
- $f(\varepsilon) = d(P_\varepsilon, l) - d(P_\varepsilon, K) < 0$.

A primeira afirmação segue do fato de que $d(P_0, l) = d(P_0, F) \geq d(P_0, K)$ e a segunda pelas hipóteses do lema que garantem que $B(P_\varepsilon, d(P_\varepsilon, l)) \cap K = \emptyset$.

Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, deve existir $t^* \in [0, \varepsilon]$ tal que $f(t^*) = 0$, ou seja, $P_{t^*} \in \{K = l\}$. A função f não possui outro zero, uma vez que f é decrescente.

■

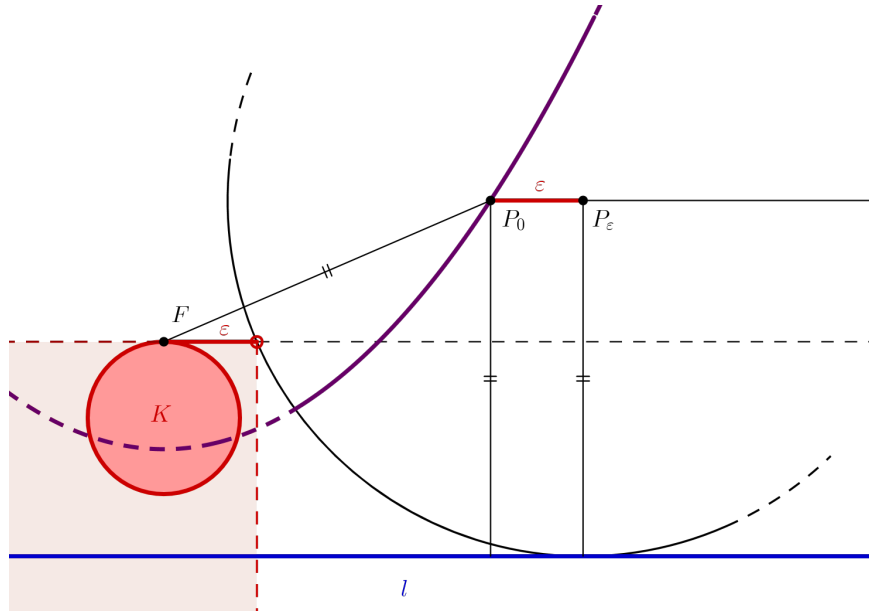


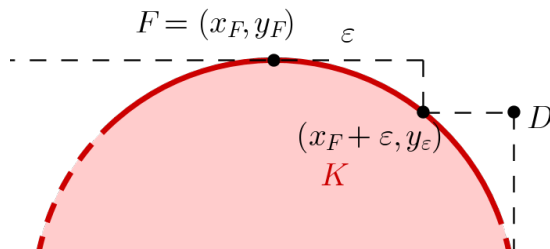
Figura 11: Lema 2

Teorema 2. Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ conexo e compacto tal que $F = (x_F, y_F)$ é o ponto mais alto de K , ou seja, $y < y_F$ para todo $(x, y) \in K$. Considere a reta $l : y = \alpha$, tal que $\alpha < y$ para todo elemento de K . O conjunto equidistante $\{K = l\}$ é assintótico à parábola c_F , cujo foco é F e reta diretriz é l , ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma altura $\bar{h} = \bar{h}(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $h > \bar{h}$, existe um único $(x(h), h) \in \{K = l\}$ tal que $|x(h) - x_{c_F}(h)| < \varepsilon$, em que $(x_{c_F}, h) \in c_F$.

Demonstração:

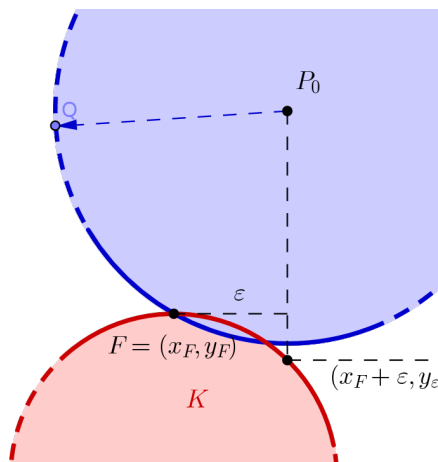
A fim de utilizarmos o Lema 2, mostraremos que no que diz respeito ao conjunto equidistante, em alturas suficientemente grandes, consideramos apenas uma vizinhança do ponto F na realização da distância.

Suponhamos inicialmente que o conjunto K é convexo. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $(x_F + \varepsilon, y_\varepsilon) \in K$ o ponto mais alto de K sobre a reta $x = x_F + \varepsilon$ e o ponto $D = (x_M, y_\varepsilon)$, onde x_M é a maior abscissa dentre os pontos de K .



Seja $P_0 = (x_{c_F}(h), h)$ a interseção da parábola c_F com a mediatriz dos pontos F e D . Temos que os pontos de K que estão no interior do círculo com centro em P_0 que passa por D e F , possuem $x < x_F + \varepsilon$ e $y > y_\varepsilon$. Assim, pelo Lema 2, existe $(x(h), h) \in \{K = l\}$ tal que $|x_{c_F}(h) - x(h)| < \varepsilon$.

No caso de K não ser convexo, basta tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal maneira que para os pontos de K com $x > x_F + \varepsilon$, tenha-se $y < y_\varepsilon$, e isso é possível pelo fato de $F = (x_F, y_F)$ ser o ponto mais alto de K . ■



No enunciado do Teorema, supomos que o conjunto possuía apenas um ponto mais alto, porém o resultado continua válido caso contrário, ou seja, o conjunto equidistante neste caso é assintótico às parábolas com focos nos pontos mais a direita e mais a esquerda dentre os pontos mais alto e a demonstração segue igual ao caso anterior.

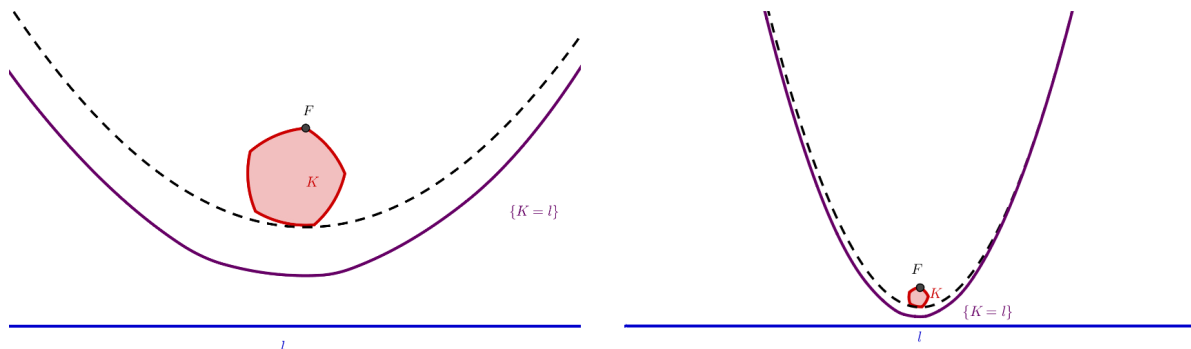


Figura 12: Exemplo de comportamento assintótico

5 Considerações Finais

Ao final deste trabalho, conseguimos mostrar o motivo pelo qual nossa definição de parábola generalizada faz sentido, uma vez que, assim como a parábola clássica, também define uma região convexa no plano e possui a propriedade reflexiva. Além disso as parábolas generalizadas se comportam como uma parábola clássica no infinito. Um próximo passo seria procurar uma boa definição para elipse generalizada.

6 Agradecimentos

Este trabalho foi realizado durante o I Simpósio Nacional do PICME durante a Escola de Verão 2014 do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, São Carlos, sob a orientação do professor Dr. Mario Ponce, PUC-Chile. Agradecemos ao professor Mario pela dedicação dispensada e à organização do evento, em especial ao professor Dr. Ali Tahzibi.

Referências

- FIGUEIREDO, D. d. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. (Projeto Euclides).
- LIMA, E. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. (Projeto Euclides, v. 1).
- LIMA, E. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 1989. (Projeto Euclides, v. 2).
- MOTZKIN T, . e. a. The number of farthest points. *Pacific journal of Mathematics*, n. 3, p. 221–232, 1953.
- MOTZKIN, T. S. Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles convexes. *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.*, v. 21, n. 6, p. 562–567, 1935.
- PONCE M.; SANTIBÁÑEZ, P. On equidistant sets and generalized conics: The old and the new. *American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 121, n. 1, p. 18–32(15), 2014.