Equações Diofantinas com Soluções na Sequência de Fibonacci

Matheus Lima Silva, Maria Eduarda Ramos, Marcos Sosa

Orientadores: Ana Paula Chaves, Roberto Alvarenga

Fevereiro de 2024

Resumo

Sejam $\{F_m\}_{m\geq 0}$ a sequência de Fibonacci, com termos iniciais 0 e 1 e cada termo, a partir do terceiro, sendo a soma dos dois anteriores, e $\{F_m^{(k)}\}_{m\geq -(k-2)}$ a sequência de Fibonacci k-generalizada, definida com $k-2$ termos de índice negativo todos iguais a zero, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, e cada termo a partir do segundo sendo a soma dos k termos anteriores. No presente texto resolvemos completamente as equações diofantinas: $F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$ e $(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+d}^{(k)})^2 = F_n^{(k)}$. Também encontramos todas as soluções para a equação $F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s = F_n$ quando $d+1 < m$. Onde m, d, k e s são inteiros positivos.

1 Introdução

Na sequência de Fibonacci $\{F_m\}_{m\geq 0}$ cada termo é obtido somando os dois termos anteriores, sendo o primeiro e o segundo termo iguais a 0 e 1, respectivamente. Os números de Fibonacci aparecem pela primeira vez em literatura no *Liber Abaci*, livro escrito por Leonardo de Pisa século *XIII*, e são conhecidos por possuirem propriedades incríveis. Por exemplo, a soma dos quadrados de dois números de Fibonacci consecultivos também é um número de Fibonacci:

$$F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_{2m+1}. \tag{1.1}$$

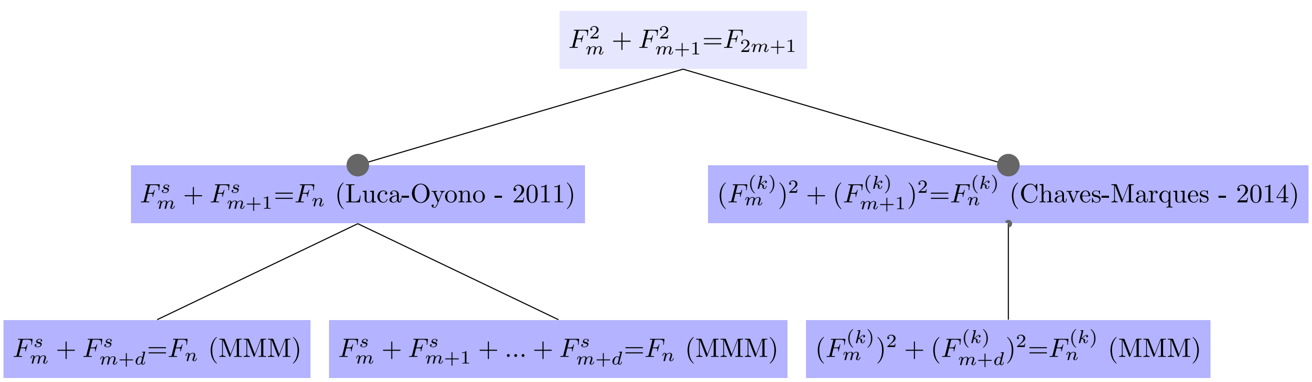
A identidade acima é uma equação diofantina com soluções nos números de Fibonacci, esse é o tipo de equações que investigamos nesse projeto e que também motiva diversos outros trabalhos em Teoria dos Números. Em 2010, Marques e Togbé [1] provaram que se a partir de um m suficientemente grande a soma $F_m^s + F_{m+1}^s$ é um número de Fibonacci, então os únicos valores possíveis para s são 1 e 2. A equação diofantina relacionada à essa soma foi resolvida completamente em 2011 por Luca e Oyono [2], eles provaram que $F_m^s + F_{m+1}^s = F_n$ não possui solução quando $s \geq 3$ e $m \geq 2$, portanto, se o expoente é maior que 2 não é possível conseguir uma identida como a (1.1).

Note que até então, só foram consideradas somas de potências de dois números de Fibonacci consecultivos e nada foi dito quando esse números estão separados por uma distânca qualquer ou quando somamos uma quantidade qualquer de potências de termos consecutivos. Neste texto, nós investigamos as generalizações do resultado obtido em [1]. Mostramos que a equação diofantina $F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$ não possui solução além das já conhecidas, concluíndo que, mesmo se retirarmos a condição dos números de Fibonacci serem consecultivos, não conseguimos uma propriedade como a (1.1) para potências de grau maior que 2. Além disso, provamos que se $d+1 < m$, então a equação diofantina $F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s = F_n$ não possui soluções quando s

e m são pelo menos 3 e d é no mínimo 2, o que indica que mesmo permitindo mais potências de números de Fibonacci consecutivos, não consiguiremos uma propriedade como a (1.1) se o expoente for maior que 2.

Outra generalização da identidade (1.1) foi obtida por Chaves e Marques [3] em 2014, na qual os autores consideraram a sequência de Fibonacci k-generalizada $\{F_m\}_{m\geq -(k-2)}$ definida com $k-2$ termos de índice negativo todos iguais a zero, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, onde cada termo a partir do segundo pode ser obtido como a soma dos k termos anteriores. O resultado que obtiveram diz que para $m > 1$ e $k \geq 3$ a equação diofantina $(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n^{(k)}$ não possui solução. Portanto, a identidade (1.1) não é válida quando aumentamos a ordem da sequência de Fibonacci. Apresentamos uma generalização desse resultado, considerando dois termos não necessariamente consecutivos da sequência k-generalizada.

No infográfico abaixo é possível observar a genealogia das equações diofantinas apresentadas nesse texto. Todas surgem como generalizações da famosa identidade (1.1) e os resultados obtidos por nós (Marcos, Maria e Matheus = MMM) durante o Jornadas de Pesquisa se desenvolveram a partir dos resultados de [1] e [2].



Na seção seguinte apresentaremos formalmente nossos três resultados e daremos uma ideia da demonstração de cada um deles.

2 Principais Resultados

A sequência de Fibonacci $\{F_m\}_{m\geq 0}$ é uma equação de números inteiros com termos iniciais 0 e 1, onde a partir do segundo termos, cada termo pode ser obtido como a soma dos dois termos anteriores. A equação diofantina:

$$F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_{2m+1} \tag{2.2}$$

é uma identidade bem conhecida da sequência de Fibonacci. Nosso primeiro resultado é sobre as soluções de uma generalização dessa equação, na qual consideramos a soma de potências de dois números de Fibonacci quaisquer, não necessariamente consecutivos, sendo um número de Fibonacci.

Teorema 2.1. *Dados $m \geq 1$, $d \geq 1$ e $s \geq 2$ números inteiros, a equação diofantina:*

$$F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$$

não possui solução quando $(m, d) \notin \{(1, 2), (1, 1)\}$.

Para demonstrar esse teorema usamos propriedades da sequência de Fibonacci e o Método de Matveev, apresentados na seção 3, para conseguir uma cota para s em função de m e d. Então, dividimos o problema em quatro casos e utilizamos um lema auxiliar introduzido na seção 4 para cotar o s numéricamente. Após isso, são usados propriedades de frações contínuas e o lema de Dujella-Pethő, ambos apresentados na seção 3. Então, conseguimos computar os casos que faltaram, concluindo que de fato não há solução.

Sabendo que a soma de potências de dois números de Fibonacci quaisquer não retorna à sequência, investigamos se poderíamos somar uma quantidade arbitrária de potências de números de Fibonacci consecultivos e obter um novo número de Fibonacci.

Teorema 2.2. *Sejam $m \geq 3$, $s \geq 3$, $d \geq 2$ inteiros, se $d+1 < m$ a equação diofantina:*

$$F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s = F_n$$

não possui solução.

Nosso método para solucionar o teorema acima consiste em utilizar propriedades da sequência de Fibonacci, que serão introduzidas na seção 3, para conseguir uma cota para o s em termos de m, d e n. Então, observamos que F_m^s é menor que F_{m+1}^s por um fator exponencial e aplicamos o método de Matveev, também introduzido na seção 3, para conseguir uma cota para s que dependa apenas do m e do d. Então, utilizamos a hipótese de que $d+1 < m$ e o fato de os casos em que $m \leq 150$ são computáveis, para assumir $m \geq 151$ e conseguir uma cota númerica para s. Feito isso, utilizaremos os conceitos de frações contínuas presentes na seção 3 para reduzir essa cota, no passo final utilizamos desigualdades, obtidas por meio de formas lineares e logaritmicas, e a hipótese $m \geq 151$ para concluir que de fato não há soluções para a equação.

Chamamos de sequência de Fibonacci k-generalizada a sequência $\{F_m^{(k)}\}_{m \geq -(k-2)}$ definida com termos iniciais $0, 0, ..., 0, 1$(k termos) e tal que a partir do termos $k+1$ cada termo da sequência pode ser obtido com a soma dos k anteriores. Em 2014, Chaves e Marques [2] provaram que a equação:

$$(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n^{(k)} \tag{2.3}$$

não possui soluções para inteiros $m > 1$ e $k \geq 3$. Estudamos uma generalização dessa equação diofantina, em que somamos quadrados de números quaisquer da sequência, não necessariamente consecutivos.

Teorema 2.3. *Dados $m \geq 1$ e $k \geq 3$ inteiros positivos, a equação diofantina:*

$$(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+d}^{(k)})^2 = F_n^{(k)} \tag{2.4}$$

ocorre se, e somente se, $m = d = 1$

Para provar esse Teorema vamos mostrar que a soma dos quadrados de dois números da sequência de Fibonacci k-generalizada sempre está entre dois termos consecultivos dessa sequência. Para isso, será usado um lema auxiliar que é apresentado na seção 3.

3 Definições e pré-requisitos

3.1 Sequências Lineares Recursivas

Definição 3.1. Uma sequência linear $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada *sequência linear recursiva de ordem* k se a_n pode ser escrito como combinação linear dos k termos anteriores para $n \geq k$, isto é,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são constantes.

Definição 3.2. A *sequência de Fibonacci* $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ é um caso especial de sequência linear recursiva de ordem 2, definida pelas condições iniciais $F_0 = 0, F_1 = 1$ e pela relação recursiva

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

para $n \geq 2$.

Definição 3.3. A sequência generalizada de Fibonacci de ordem k, $(F_n^{(k)})_{n \geq -(k+2)}$, é definida pelas condições iniciais $F_{-(k-2)}^{(k)} = 0$, ..., $F_{-1}^{(k)} = 0$, $F_0^{(k)} = 0$ e $F_1^{(k)} = 1$ para $k \geq 2$. Cada termo subsequente é a soma dos k termos anteriores, isto é, para n:

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)}$$

Definição 3.4. A sequência de Lucas $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida por

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 3$$

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

Definição 3.5. Seja $\{a_n\}$ uma sequência linear recursiva de ordem k que satisfaz a relação $a_n = c_1.a_{n-1} + ... + c_k.a_{n-k}$, seu polinômio característico é:

$$p(x) = x^n - c_1.x^{n-1} - ... - c_{k-1}x - c_k$$

Um resultado fundamental no estudo de sequências recursivas lineares é a fórmula de Binet, ela nos permite calcular qualquer termo da sequência sem precisar usar a relação recursiva.

Teorema 3.6. *(fórmula de Binet) Se $\{a_n\}$ é uma sequência linear recursivda de ordem k que satisfaz a equação*

$$a_n = c_1.a_{n-1} + ... + c_k.a_{n-k}$$

para $n \geq k$. Se $\alpha_1, ..., \alpha_r$ são as raízes do polinômio característico de $\{a_n\}$ com multiplicidades $m_1, m_2, ..., m_r$, respectivamente, então existem polinômios $g_1(x), g_2(x)...., g_r(x)$ tais que $gr(g_i) < m_i$ para todo $1 \leq i \leq r$ e

$$a_n = \sum_{j=1}^{k} g_j(n).\alpha_j^n$$

3.2 Propiedades da Sequência de Fibonacci

Proposição 3.7. $5 \nmid F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ *para todo* $n \geq 1$.

Proposição 3.8. ***(Fórmula de Binet para Fibonacci)*** *Para a sequência de Fibonacci, os termos podem ser expressos usando a fórmula de Binet:*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *são as raízes da equação* $x^2 = x + 1$.

Proposição 3.9. *Para qualquer inteiro* $m \geq 0$, *a soma dos quadrados de dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci é igual ao termo da sequência localizado em posição* $2m+1$, *isto é,*

$$F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_{2m+1}.$$

Proposição 3.10. *Os números de Fibonacci têm limites inferior e superior dados por* $\alpha^{m-2} < F_m < \alpha^{m-1}$ *para todo* $m \geq 1$, *onde* α *é a razão áurea.*

3.3 Teorema de Matveev - 2000

O Teorema de Matveev é um resultado fundamental na teoria dos números transcendentais, fornecendo uma estimativa explícita para a medida de linearidade independente de logaritmos de números algébricos. Este teorema tem importantes aplicações na solução de equações diofantinas, na teoria de aproximações diofantinas.

Definição 3.11. O *grau* D de um corpo algébrico $\mathbb{K}$ é a dimensão de $\mathbb{K}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 3.12. A *altura logarítmica* de um número algébrico η, denotada por $h(\eta)$, é definida como

$$h(\eta) := \frac{1}{g}\left(\log(a_0) + \sum_{i=1}^{g} \log(\max\{|\sigma_i(\eta)|, 1\})\right),$$

onde g é o grau de η sobre $\mathbb{Q}$, a_0 é o coeficiente líder do polinômio minimal de η sobre $\mathbb{Z}$, e $\sigma_i(\eta)$ são os conjugados de η em $\mathbb{K}$.

Teorema 3.13 (Matveev - 2000)**.** *Sejam* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *números reais algébricos positivos em um corpo algébrico* $\mathbb{K}$ *de grau* D, *e* $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *inteiros tais que*

$$\Lambda := \alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2}\cdots\alpha_k^{b_k} - 1 \neq 0,$$

então a desigualdade

$$|\Lambda| > \exp\left(-C_{k,D}(1+\log(B))A_1A_2\cdots A_k\right)$$

é válida, onde

$$C_{k,D} := 1.4 \cdot 30^{k+3} \cdot k^{4.5} \cdot D^2(1 + \log(D)), \tag{3.5}$$

$$B \geq \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_k|\}, \tag{3.6}$$

$$A_i \geq \max\{Dh(\alpha_i), |\log(\alpha_i)|, 0.16\}. \tag{3.7}$$

Este teorema fornece uma ferramenta poderosa para o estudo de equações em que os expoentes são inteiros e as bases são números algébricos, sendo amplamente utilizado em pesquisas avançadas na teoria dos números.

3.4 Frações contínuas

Definição 3.14. Dado um número x, racional ou irracional, uma fração contínua é uma expressão da forma:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}},$$

onde a_0 é a parte inteira de x e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos para $i \geq 1$. Para números racionais, esta expressão é finita, enquanto para irracionais, é infinita.

Definição 3.15. Os convergentes de uma fração contínua x são frações da forma $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$, onde p_n e q_n são números inteiros e n é o índice do convergente.

Teorema 3.16 (Legendre)**.** *Seja x um irracional e p e q inteiros não nulos. Se*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de x.

Este teorema indica que sob certas condições, uma fração $\frac{p}{q}$ que se aproxima de um número irracional x com suficiente precisão é de fato um dos convergentes da expansão em fração contínua de x.

Este teorema estabelece uma propriedade fundamental das aproximações diofantinas, indicando que para qualquer número irracional, podemos encontrar uma aproximação extremamente precisa usando os convergentes de sua expansão em fração contínua.

3.5 Lema de Dujella-Pethő

Antes de apresentarmos o Lema de Dujella-Pethő, vamos definir a norma $||\cdot||$ utilizada no contexto deste lema.

Definição 3.17 (Norma)**.** A norma $||x||$ de um número real x é definida como a distância de x ao inteiro mais próximo. Formalmente, $||x|| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$.

Agora, estamos prontos para enunciar e provar o Lema de Dujella-Pethő no contexto de aproximações diofantinas e frações contínuas.

Lema 3.18 (Dujella-Pethő)**.** *Seja M um inteiro positivo e $\frac{p}{q}$ um convergente da fração contínua do irracional γ tal que $q > 6M$. Seja μ um número real e defina-se $\epsilon := ||\mu q|| - M||\gamma q||$. Se $\epsilon > 0$, então não existe solução para a inequação*

$$0 < n\gamma - s + \mu < AB^{-n}$$

em inteiros positivos n e s, com

$$\frac{\log(Aq/\epsilon)}{\log(B)} \leq n \leq M.$$

Este lema fornece um critério importante para a inexistência de soluções em certas inequações diofantinas envolvendo aproximações de números irracionais por frações contínuas, baseando-se na norma de múltiplos de q e no comportamento assintótico de sequências relacionadas a γ.

4 Resultados Auxiliares

Lema 4.1. *Seja $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a proporção áurea) e $m \geq 3$ um número inteiro, então vale a desigualdade:*

$$\alpha^{m-\frac{7}{4}} < F_m < \alpha^{m-\frac{3}{2}}$$

A ideia para provar esse lema é utilizar indução com base nos casos $m = 3$ e $m = 4$, para os quais verificamos que:

$$\alpha^{3-\frac{7}{4}} < 1.83 < 2 < 2.05 < \alpha^{3-\frac{3}{2}} \text{ e } \alpha^{4-\frac{7}{4}} < 2.95 < 3 < 3.33 < \alpha^{4-\frac{3}{2}}.$$

Então, supondo que a desigualdade é válida para todo $k \leq m$, temos:

$$\alpha^{m-1-\frac{7}{4}} + \alpha^{m-\frac{7}{4}} < F_{m-1} + F_m < \alpha^{m-1-\frac{3}{2}} + \alpha^{m-\frac{3}{2}}.$$

Logo, $\alpha^{m-\frac{7}{4}}(1 + \alpha^{-1}) < F_{m+1} < \alpha^{m-\frac{3}{2}}(1 + \alpha^{-1})$ e como $\alpha^2 = 1 + \alpha$ concluímos que:

$$\alpha^{m+1-\frac{7}{4}} < F_{m+1} < \alpha^{m+1-\frac{3}{2}}$$

finalizando nossa demonstração.

Proposição 4.2. *Dados $m \geq 1$, $d \geq 1$ números inteiros, a equação diofantina:*

$$F_m^2 + F_{m+d}^2 = F_n$$

não possui solução quando $(m, d) \notin \{(1, 2), (1, 1)\}$.

Primeiro provaremos os casos $m \in \{1, 2\}$. Quando $m = 1$ nossa equação é $1 + F_{d+1}^2 = F_n$ e $d \geq 3$, logo:

$$F_n < F_{d+1}^2 + F_d^2 = F_{2d+1}.$$

Por outro lado, pelo lema anterior

$$F_{2d} < \alpha^{2d-\frac{3}{2}} = \alpha^{(d+1-\frac{7}{4})^2} < F_{d+1}^2 < F_n$$

Assim, F_n está entre dois números de Fibonacci consecutivos, não podendo ser um termo da sequência. Quando $m = 2$ temos algo parecido, nossa equação é $1 + F_{m+2}^2 = F_n$ e $d \geq 2$, logo:

$$F_n < F_{d+1}^2 + F_{d+2}^2 = F_{2d+3}$$

Além disso, o lema anterior nos garante que:

$$F_{2d+2} < \alpha^{2d+2-\frac{3}{2}} = \alpha^{(d+2-\frac{7}{4})^2} < F_{d+2}^2 < F_n.$$

Novamente, F_n está entre dois números de Fibonacci consecutivos e não pode ser um termo da sequência. Agora, vamos provar os casos em que $m > 2$, primeiro observamos que:

$$\begin{gathered} F_m < F_{m+d-1} \Rightarrow F_m^2 < F_{m+d-1}^2 \\ \Rightarrow \\ F_m^2 + F_{m+d}^2 < F_{m+d-1}^2 + F_{m+d}^2 = F_{2(m+d-1)+1} \\ \Rightarrow \\ F_n < F_{2m+2d-1} \end{gathered}$$

Por outro lado:

$$\begin{gathered} 0 < F_m^2 + F_{m+d-2}^2 \\ \Rightarrow \\ F_{m+d-1}^2 + F_{m+d}^2 < F_m^2 + F_{m+d-2}^2 + F_{m+d-1}^2 + F_{m+d}^2 \\ \Rightarrow \\ F_{2(m+d-1)+1} < F_m^2 + F_{m+d-2}^2 + F_{m+d-1}^2 + F_{m+d}^2 \\ \Rightarrow \\ F_{2m+2d-1} < F_m^2 + F_{2(m+d-2)+1} + F_{m+d}^2 \\ \Rightarrow \\ F_{2m+2d-2} + F_{2m+2d-3} < F_m^2 + F_{2m+2d-3} + F_{m+d}^2 \\ \Rightarrow \\ F_{2m-2d-2} < F_m^2 + F_{m+d}^2 \end{gathered}$$

Então, por estar entre dois números de Fibonacci consecultivos, F_n não pode ser um termo da sequência.

Lema 4.3. *Dados $m \geq 1$ um número inteiro, o m-ésimo termo da sequência de Fibonacci k-generalizada pode ser escrito como:*

$$F_m^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{m-A-i}^{(k)} \right)$$

para todo A, com $1 \leq A \leq m-1$ sempre que $k \geq 2$.

Demonstração: Primeiro verificamos o caso $A = m-1$ e depois usamos indução contraria para mostrar que se o Lema 4.3 vale para algum $1 < A \leq n-1$ então o Lem 4.3 vale para $A-1$.
Caso $A = m-1$: Como

$$i \geq 1 \implies F_{1-i}^{(k)} = 0$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{k-1} F_{m-1-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{1-i}^{(k)} \right) = F_{m-1}^{(k)} + \cdots + F_{m-k}^{(k)} = F_m^k.$$

O que prova o caso $A = n - 1$, agora suponha que o Lema 4.3 é válido para algúm A, com $1 < A \leq n - 1$, logo:

$$\begin{aligned}
F_m^{(k)} &= F_A^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1} F_{m-A-i}^{(k)} \right) + \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{m-A-i}^{(k)} \right) \\
&= F_A^{(k)} \cdot F_{m-A+1}^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{n-A-i}^{(k)} \right) \\
&= \left(F_{A-1}^{(k)} + \cdots + F_{A-k}^{(k)} \right) \cdot F_{m-A+1}^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{n-A-i}^{(k)} \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} + F_{A-k}^{(k)} \right) \cdot F_{m-A+1}^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{n-A-i}^{(k)} \right) \text{Fatorando} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(F_{m-A+1}^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1-j} F_{m-A-i}^{(k)} \right) + F_{A-k}^{(k)} \cdot F_{m-A+1}^{(k)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(F_{m-A+1}^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-j} F_{m-(A-1)-i}^{(k)} \right) + F_{A-k}^{(k)} \cdot F_{m-A+1}^{(k)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-j} F_{m-(A-1)-i}^{(k)} \right) + F_{A-k}^{(k)} \cdot F_{m-A+1}^{(k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} F_{(A-1)-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-j-1} F_{m-(A-1)-i}^{(k)} \right) + F_{A-k}^{(k)} \cdot F_{m-A+1}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$F_m^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} F_{(A-1)-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{m-(A-1)-i}^{(k)} \right).$$

O que prova o lema.

Lema 4.4. *Sejam $d \geq 1$ e $m \geq 2$ inteiros, então:*

$$\frac{F_m}{F_{m+d}} < (\frac{2}{3})^d$$

Para verificar a desigualdade do lema, lembramos que é conhecido que $\dfrac{F_j}{F_{j+1}} < \dfrac{2}{3}$ para todo $j \geq 2$. Disso segue que:

$$\frac{F_m}{F_{m+d}} = \frac{F_m}{F_{m+1}} \cdot \frac{F_{m+1}}{F_{m+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{F_{m+d-2}}{F_{m+d-1}} \cdot \frac{F_{m+d-1}}{F_{m+d}} < (\frac{2}{3})^d \tag{4.8}$$

5 Demonstração dos Teoremas Principais

Nas seções 5.1, 5.2 e 5.3 vamos demonstrar os teoremas 2.3, 2.2 e 2.1, respectivamente. Além disso, ao final da seção 5.3 será dada uma ideia do método computacional utilizado na demonstração do teorema 2.1 e do teorema 2.2 para verificar se, sob certos limitantes, há soluções para as respectivas equações diofantinas. Dito isso, vamos colocar a mão na massa.

5.1 Demonstração do Teorema 2.3

No problema original, $(m, d) = (1, 1)$ é solução para a equação. $(m, d) = (2, 1)$ e $(m, d) = (1, 2)$ são soluções se, e somente se, $s = 2$. Suponha a partir de agora que $m + d > 3$.

Usando o Lema 4.3 e fazendo $A = m + d$:

$$F^{(k)}_{2m+2d-1} = \sum_{j=0}^{k-1} F^{(k)}_{m+d-j} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{m+d-1-i} \right) > (F^{(k)}_{m+d})^2 + (F^{(k)}_{m+d-1})^2 > (F^{(k)}_{m})^2 + (F^{(k)}_{m+d})^2$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=2}^{k-1} F^{(k)}_{m+d-j} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F^{(k)}_{m+d-2-i} \right) < (\sum_{j=0}^{k-2} F^{(k)}_{m+d-2-j})(\sum_{j=0}^{k-2} F^{(k)}_{m+d-2-j})$$

Somando $F^{(k)}_{m+d-1} \left(\sum_{i=0}^{k-2} F^{(k)}_{m+d-2-i} \right)$ em ambos os lados:

$$\sum_{j=1}^{k-1} F^{(k)}_{m+d-j} . \sum_{i=0}^{k-1-j} F^{(k)}_{m+d-2-i} < (\sum_{j=0}^{k-1} F^{(k)}_{m+d-1-j}).(\sum_{j=0}^{k-2} F^{(k)}_{m+d-2-j}) = F^{(k)}_{m+d} . \sum_{j=0}^{k-2} F^{(k)}_{m+d-2-j}$$

$$= (F^{(k)}_{m+d})^2 - F^{(k)}_{m+d-1} . F^{(k)}_{m+d}$$

passando o $F^{(k)}_{m+d} . F^{(k)}_{m+d-1}$ para o outro lado:

$$F^{(k)}_{m+d} . F^{(k)}_{m+d-1} + \sum_{j=1}^{k-1} F_{m+d-j} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F^{(k)}_{m+d-2-i} \right) < (F^{(k)}_{m+d})^2$$

Aplicando $m \to 2m + 2d - 2$ e $A = m + d$ no Lema 4.3 obtemos

$$F^{(k)}_{2m+2d-2} < (F^{k}_{m+d})^2 < (F^{(k)}_{m+d})^2 + (F^{(k)}_{m})^2$$

Ou seja:

$$F^{(k)}_{2m+2d-2} < (F^{(k)}_{m+d})^2 + (F^{(k)}_{m})^2 < F^{(k)}_{2m+2d-1}$$

Logo a soma de quadrados da sequência de k-bonacci está entre dos termos consecutivos da sequência, por tanto, a soma de quadrados não pode pertencer a sequência, loqo a equação:

$$(F^{(k)}_{m})^2 + (F^{(k)}_{m+d})^2 = F^{(k)}_{n}$$

não tem solução para $n + d > 3$.

5.2 Demonstração do Teorema 2.2

5.2.1 Uma desigualdade para s em termos de m, n e d

Pela proposição (3.11), temos que :

$$\alpha^{n-2} < F_n = F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s < \alpha^{(m-1)s} + \alpha^{ms} + ... + \alpha^{(m+d-1)s} = \alpha^{(m-1)s}\frac{\alpha^{s(d+1)}-1}{\alpha^s - 1}.$$

Porntanto:

$$\alpha^{n-2} < \alpha^{(m-1)s}\frac{\alpha^{s(d+1)}}{\alpha^{s-1}} = \alpha^{s(m+d-1)+1} \Leftrightarrow n-2 < (m+d-1)s-1$$

E concluímos que:

$$n < (m+d-1)s+3 < (m+d)s$$

Por outro lado, a proposição (3.11) também nos garante que:

$$\alpha^{(m-2)s} + \alpha^{(m-3)s} + ... + \alpha^{(m+d-2)s} < F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s = F_n < \alpha^{n-1}$$

Então:

$$\alpha^{(m-2)s}\alpha^{s(d+1)}\alpha^{-s+1} < \alpha^{n-1}$$

E então, chegamos em uma cota inferior para o n em função de m, d e s:

$$(m+d-2)s+1 < n-1 \Rightarrow (m+d-2)s+2 < n \Rightarrow (m+d-3)s < n$$

Rearranjando os resultados anteriores, mostramos que:

$$\frac{n}{m+d} < s < \frac{n}{m+d-3}. \tag{5.9}$$

5.2.2 Cota para s em função de m e d

Para estudar nossa equação diofantina vamos modelá-la de maneira que seja possível utilizar o método de Matveev. Primeiro vamos aplicar a fórmula de Binet em F_n e reescrever a equação diofantina como:

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - F_{m+d}^s = F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d-1}^s + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}}$$

Agora, dividiremos ambos os lados da equação pelo termo dominante F_{m+d}^s:

$$\alpha^n \cdot \sqrt{5}^{-1} \cdot F_{m+d}^{-s} - 1 = (\frac{F_m}{F_{m+d}})^s + (\frac{F_{m+1}}{F_{m+d}})^s + ... + (\frac{F_{m+d-1}}{F_{m+d}})^s + (\frac{\beta^n \cdot 5^{\frac{-1}{2}}}{F_{m+d}})^s$$

Assim, pelo lema (4.6):

$$\alpha^n \cdot \sqrt{5}^{-1} \cdot F_{m+d}^{-s} - 1 < (\frac{2}{3})^{sd} + (\frac{2}{3})^{s(d-1)} + ... + (\frac{2}{3})^s + (\frac{2}{3})^{s(d+1)}$$

Então:

$$\alpha^n \cdot \sqrt{5}^{-1} \cdot F_{m+d}^{-s} - 1 < (\frac{2}{3})^s \cdot \frac{(\frac{2}{3})^{s(d+1)} - 1}{(\frac{2}{3})^s - 1} < 0.9^s$$

E concluímos que:

$$\alpha^n \cdot \sqrt{5}^{-1} \cdot F_{m+d}^{-s} - 1 < 0.9^s$$

Agora que já temos nossa equação no formato do teorema de Matveev, precisamos verificar que o lado esquerdo da desigualdade não se anula. É conhecido que $\alpha^j = \alpha F_j + F_{j-1}$, por isso, se o lado esquerdo da inequação que obtivemos acima for zero, teremos:

$$\frac{\alpha F_n + F_{n-1}}{\sqrt{5}} = F^s_{m+d} \Rightarrow \frac{F_n}{2\sqrt{5}} + \frac{F_n}{2} + \frac{F_{n-1}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{F_n + 2F_{n-1}}{\sqrt{5}} = 2F^s_{m+d} - F_n \Rightarrow \frac{F_n + 2F_{n-1}}{F^s_{m+d} - F_n} = \sqrt{5}$$

O que é um absurdo, pois $\sqrt{5}$ é irracional. Então, podemos aplicar o método de Matveev.
Nossas constantes são:

$$D = 2,\ k = 3,\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \sqrt{5},\ \alpha_3 = F_{m+d},\ b_1 = n,\ b_2 = -1,\ b_3 = -s,\ B = n$$

$$A_1 = 0.5,\ A_2 = 1.61 \text{ e } A_3 := 2(m + d - 1)\log(\alpha) > 2\log(F_{m+d}) = h(F_{m+d})$$

O método de Matveev nos garante que:

$$0.9^s > \alpha^n 5^{\frac{1}{2}} F^{-s}_{m+d} - 1 > exp(-C_{3,2}(1 + \log(B))A_1A_2A_3)$$

Como $C_{3,2} < 10^{12}$, temos:

$$exp(10^{12}(1 + \log(n))0.5 \cdot 1.61 \cdot 2(m + d - 1)\log(\alpha)) > \frac{1}{0.9^s}$$

Então, concluímos que:

$$s < 4.72 \cdot 10^{13}(m + d + 1)\log(m + d + 1) \tag{5.10}$$

5.2.3 Cota absoluta para s

Agora, vamos assumir $m \geq 151$ e utilizar a hipótese $d + 1 < m$ para conseguir uma cota numérica para o s, pela equação (3.10):

$$s < 9.44 \cdot 10^{13} m \log(2m) \tag{5.11}$$

Defina $x_j = \dfrac{s}{\alpha^{2(m+j)}}$ para $j = 0, 1, ..., d$. Para $m \geq 80$, vale:

$$x_j < \frac{1}{\alpha^{m+j}} \tag{5.12}$$

Para $m \geq 151$ vale:

$$1 < \left(1 + \frac{1}{\alpha^{2(m+j)}}\right)^s < e^{x_j} < 1 + 2x_j \text{ e } 1 - 2x_j < e^{-2x_j} < \left(1 - \frac{1}{\alpha^{2(m+j)}}\right)^s < 1$$

Portanto:

$$1 - 2x_j < (1 - \frac{(-1)^{m+j}}{\alpha^{2(m+j)}})^s < 1 + 2x_j \tag{5.13}$$

A partir da fórmula de Binet, podemos reescrever F^s_{m+j}:

$$F^s_{m+j} = \frac{\alpha^{(m+j)s}}{\sqrt{5}} \cdot (1 - (\frac{(-1)^{m+j}}{\alpha^{2(m+j)}})^s$$

Logo:

$$F_{m+j} - \frac{\alpha^{(m+j)s}}{\sqrt{5}^s} = \frac{\alpha^{(m+j)s}}{\sqrt{5}} \cdot [(1 - (\frac{(-1)^{m+j}}{\alpha^{2(m+j)}})^s - 1]$$

Então, pela desigualdade (5.13), temos:

$$|F^s_{m+j} - \frac{\alpha^{(m+j)s}}{\sqrt{5}^s}| < 2x_j \frac{\alpha^{(m+j)s}}{\sqrt{5}^s} \tag{5.14}$$

Agora, vamos reescrever novamente a equação diofantina do nosso teorema:

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{ms}}{\sqrt{5}^s} - \frac{\alpha^{(m+1)s}}{\sqrt{5}^s} - ... - \frac{\alpha^{(m+d)s}}{\sqrt{5}^s} = \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} + (F_m^s - \frac{\alpha^{ms}}{\sqrt{5}^s}) + (F_{m+1}^s - \frac{\alpha^{(m+1)s}}{\sqrt{5}^s}) + ... + (F_{m+d}^s - \frac{\alpha^{(m+d)s}}{\sqrt{5}^s})$$

Tomando o módulo em ambos os lados e aplicando desigualdade triângular:

$$|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{ms}}{\sqrt{5}^s} - \frac{\alpha^{(m+1)s}}{\sqrt{5}^s} - ... - \frac{\alpha^{(m+d)s}}{\sqrt{5}^s}| \leq \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} + |F_m^s - \frac{\alpha^{ms}}{\sqrt{5}^s}| + |F_{m+1}^s - \frac{\alpha^{(m+1)s}}{\sqrt{5}^s}| + ... + |F_{m+d}^s - \frac{\alpha^{(m+d)s}}{\sqrt{5}^s}|$$

Pela desigualdade (5.14):

$$|\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^{ms}}{\sqrt{5}^s} - \frac{\alpha^{(m+1)s}}{\sqrt{5}^s} - ... - \frac{\alpha^{(m+d)s}}{\sqrt{5}^s}| < \frac{2s\alpha^{ms-2m}}{\sqrt{5}^s} \cdot (1 + \alpha^{s-2} + (\alpha^{s-2})^2 + ... + (\alpha^{s-2})^d) + \frac{1}{\alpha^n}$$

Dividindo ambos os lados por $\frac{\alpha^{(m+d)s}}{\sqrt{5}^s}$, obtemos:

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - \alpha^{-ds} \cdot (1 + \alpha^s + (\alpha^s)^2 + ... + (\alpha^s)^d)| < 2x_0\alpha^{-ds}(1 + \alpha^{s-2} + (\alpha^{s-2})^2 + (\alpha^{s-2})^d) + \frac{\sqrt{5}^s}{\alpha^{n+(m+d)s}}$$

Pela desigualdade (5.12):

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1 - (\alpha^{-s} + (\alpha^{-s})^2 + ... + (\alpha^{-s})^d)| < 2\frac{1}{\alpha^m}\frac{1}{\alpha^{ds}} \cdot (\frac{\alpha^{(s-2)(d+1)} - 1}{\alpha^{s-2} - 1}) + \frac{\sqrt{5}^s}{\alpha^{n+(m+d)s}}$$

Usando desigualdade triangular, chegamos que:

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1| < 2\frac{1}{\alpha^m}\frac{1}{\alpha^{ds}} \cdot (\frac{\alpha^{(s-2)(d+1)} - 1}{\alpha^{s-2} - 1}) + \frac{\sqrt{5}^s}{\alpha^{s(2m+2d-3)}} + \alpha^{-s} + (\alpha^{-s})^2 + ... + (\alpha^{-s})^d$$

Cotando a progressão geométrica superiormente pelo valor para o qual a série geométrica correspondente converge:

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1| < 2\alpha^{-m+ds} \cdot (\frac{\alpha^{(s-2)(d+1)} - 1}{\alpha^{s-2} - 1}) + \frac{\sqrt{5}^s}{\alpha^{(2m+2d-3)s}} + \frac{1}{\alpha^s - 1}$$

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1| < 2\alpha^{-m} \cdot \frac{\alpha^{s-2(d+1)}}{\alpha^{s-2} - 1} + \frac{\sqrt{5}^s}{\alpha^{(2m+2d-3)s}} + \frac{1}{\alpha^s - 1} < 2\frac{1}{\alpha^m}\frac{\alpha^s}{\alpha^{s+4} - \alpha^6} + \frac{1}{\alpha^{s-1}} + \frac{1}{2\alpha^{s(m+2d)-3s}}$$

Então, utilizando que $(\frac{5^{\frac{1}{2}}}{\alpha^m})^s < \frac{1}{2}$ e $\frac{\alpha^s}{\alpha^{s+4} - \alpha^6} < 0.42$, temos:

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1| < \frac{0.84}{\alpha^m} + \frac{1}{\alpha^{s-1}} + \frac{1}{2\alpha^{s(m+2d)-3s}}$$

Seja $l := min\{m, s-1\}$, então:

$$|\Lambda| < \frac{2.34}{\alpha^l} \tag{5.15}$$

Onde $\Lambda := \alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1$. Note que $\Lambda \neq 0$, caso contrário teríamos:

$$\alpha^{2(m+d)s-2n} = 5^{s-1}$$

Logo $\alpha^{2(m+d)-2n}$ é inteiro, mas isso implica $s = 1$, o que é uma contradição. Assim, podemos utilizar novamente o método de Matveev, nossas constantes são:

$$D := 2,\ k := 2,\ \alpha_1 := \alpha,\ \alpha_2 := \sqrt{5},\ A_1 := 0.5,\ A_2 := 1.61,\ b_1 := n - (m+d)s,\ b_2 := s - 1 \text{ e } B = s - 1$$

Combinando o resultado do método de Matveev com a desigualdade (5.15):

$$\frac{2.34}{\alpha^l} > exp(-C_{2,2} \cdot (1 + \log(s-1))0.5 \cdot 1.61) \Rightarrow l < \frac{\log(2.34)}{\log(\alpha)} + \frac{5.3 \cdot 10^9 0.5 \cdot 1.61 \cdot (1 + \log(s-1))}{\log(\alpha)}$$

Então:

$$l < 1.77 + 1.34 \cdot 10^{10} \log(s-1) \Rightarrow l < 1.35 \cdot 10^{10} \log(s-1)$$

Caso $l = s-1$:

$$\frac{s-1}{\log(s-1)} < 1.35 \cdot 10^{10} \Rightarrow s < 3.6 \cdot 10^{11}$$

Caso $l = m$, pela desigualdade (5.11), temos:

$$m < 1.35 \cdot 10^{10} \log\big(9.44 \cdot 10^{13} m \log(2m)\big) \Rightarrow m < 8.51 \cdot 10^{11}$$

Aplicando essa cota na desigualdade (5.11) concluímos que:

$$s < 2.21 \cdot 10^{27}$$

5.2.4 Redução da cota absoluta para s

Como $|\Lambda| < \dfrac{0.84}{\alpha^m} + \dfrac{1}{\alpha^{s-1}} + \dfrac{1}{2\alpha^{s(m+2d)-3s}}$ e $m \geq 151$, $s \geq 3$ e $d \geq 2$, temos $|\Lambda| < 0.4$.

Seja $\Gamma := (s-1)\log\big(\sqrt{5}\big) - ((m+d)s-n)\log(\alpha)$, então:

$$\Gamma \neq 0 \text{ pois } 0 \neq \Lambda = e^{\Gamma} - 1$$

Portanto:

$$|e^{\Lambda} - 1| < 0.4 \Rightarrow 0.6 < e^{\Gamma} < 1.4 \Rightarrow -0.52 < \Gamma < 0.34 \Rightarrow |\Gamma| < 0.52 \Rightarrow e^{|\Gamma|} < 1.69$$

Então:

$$|\Gamma| < e^{|\Gamma|}|e^{\Gamma} - 1| < 1.69|\Lambda| \Rightarrow |\Gamma| < \frac{0.84 \cdot 1.69}{\alpha^m} + \frac{1.69}{\alpha^{s-1}} + \frac{0.85}{\alpha^{(m+2d)s-3s}}$$

Dividindo ambos os lados por $(s-1)\log(\alpha)$:

$$\left|\frac{\log\big(\sqrt{5}\big)}{\log(\alpha)} - \frac{(m+d)s-n}{s-1}\right| < \frac{1}{(s-1)\log(\alpha)}\left(\frac{1.42}{\alpha^m} + \frac{0.85}{\alpha^{s(m+2d)-3s}} + \frac{1.69}{\alpha^{s-1}}\right)$$

Tome $s \geq 19$, então:

$$\alpha^{s-1} > 154(s-1) \text{ e como } \alpha^m \geq \alpha^{151} > 154(s-1), \text{ já que } s < 2.21 \cdot 10^{27}.$$

Temos:

$$\left|\frac{\log\big(\sqrt{5}\big)}{\log(\alpha)} - \frac{(m+d)s-n}{s-1}\right| < \frac{1}{\log(\alpha)(s-1)}\frac{4.8}{154(s-1)} < \frac{4.8}{154(s-1)^2} < \frac{1}{32(s-1)^2}$$

Então, pelo critério de Legendre $\dfrac{(m+d)s-n}{s-1} = \dfrac{p_t}{q_t}$, um convergente da fração contínua de $\gamma = \dfrac{\log\big(\sqrt{5}\big)}{\log(\alpha)}$.

Seja $g = mdc((m+d)s-n, s-1)$, então:

$$q_t = \frac{s-1}{g} \Rightarrow q_t \leq s-1 < s$$

Uma investigação computacional revelou que $q_{54} > 2.21 \cdot 10^{27}$, logo $t \in \{0, 1, ..., 53\}$. O maior valor de a_k para $k \in \{0, 1, ..., 53\}$ é 29, logo $a_t \leq 29$. Por uma propriedade conhecida de frações contínuas:

$$\left|\gamma - \frac{(m+d)s-n}{s-1}\right| = \left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{1}{(a_{t+1}+2)q_t^2} > \frac{g^2}{31(s-1)^2} > \frac{1}{31(s-1)^2}$$

Então temos $\dfrac{1}{31(s-1)^2} < \left|\gamma - \dfrac{p_t}{q_t}\right| < \dfrac{1}{32(s-1)^2}$, um absurdo. Portanto, concluímos que $s < 19$.

5.2.5 Contradição da hipótese m maior que 151

Sabemos que:

$$|\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1| < \frac{0.84}{\alpha^m} + \frac{1}{\alpha^{s-1}} + \frac{1}{2\alpha^{s(m+2d)-3s}} < \frac{1.84}{\alpha^m} + \frac{1}{\alpha^{s-1}}$$

Então:

$$\frac{1.84}{\alpha^m} > |\alpha^{n-(m+d)s}5^{\frac{s-1}{2}} - 1| - \frac{1}{\alpha^{s-1}} := \Theta(r,s), \text{ sendo } r := n-(m+d)s$$

.

Temos que $0.6 - 1.67s < r < 1.75 - 1.68s$ e uma análise computacional revelou que, para $s \geq 9$, temos:

$$\Theta(r,s) > \frac{2.7}{10^3}, \text{ logo } \frac{1.84}{\alpha^m} > \frac{2.7}{10^3}$$

o que implica que $m < 13$, uma contradição pois $m \geq 151$. Assim, temos $s \leq 8$.

5.2.6 O caso s entre 3 e 8

Usaremos uma desigualdade que será provada no lema 5.3.3:
Se $x \in \mathbb{N}$, então:

$$|\sqrt{5}^s.F_x^s - \alpha^{xs}| < 2^s.\alpha^{xs-2x}$$

$$|\sum_{k=m}^{m+d}\alpha^{ks} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^n| = |\sum_{k=m}^{m+d}(\alpha^{ks} - \sqrt{5}^s.F_k^s) - \sqrt{5}^{s-1}.(\alpha^n - \sqrt{5}.F_n)| < \sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^n + 2^s.\sum_{k=m}^{m+d}\alpha^{ks-2k}$$

$$< \sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^n + 2^s.\alpha^{(m+d)(s-2)}.\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{-k(s-2)} = \sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^n + 2^s.\alpha^{(m+d)(s-2)}.\frac{\alpha^{s-2}}{\alpha^{s-2}-1} < \sqrt{5}^{s-1}|\beta|^n + \alpha^{(m+d)(s-2)}.4.2^s$$

Para estimar o termo $\sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^n$ usamos a desigualdade $n > s(m+d-2)+1$ e o fato de que $|\beta| < 1$:

$$\sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^n < \sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^{s(m+d-2)+1} = (\sqrt{5}.|\beta|^2)^{s-1}.|\beta|^{(m+d-4)s+3} < |\beta|^{(m+d-4)s+3} = \frac{\alpha^{4s-3}}{\alpha^{s(m+d)}} < 2^{s+2}.\alpha^{(m+d)(s-2)}$$

Assim, concluimos que:

$$|\sum_{k=m}^{n+d}\alpha^{ks} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^n| < 2^{s+3}.\alpha^{(m+d)(s-2)}$$

Dividindo ambos os lados por α^{m+d}:

$$|\sum_{k=0}^{d}\alpha^{-ks} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| < 2^{s+3}.\alpha^{-2(m+d)}$$

Usando a fórmula para a soma da progressão geométrica no lado esquerdo:

$$|\sum_{k=0}^{d}.\alpha^{-ks} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| = |\frac{\alpha^s - \alpha^{-s(d+1)}}{\alpha^s - 1} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}|$$

Usando a desigualdade triangular:

$$|\frac{\alpha^s - \alpha^{-s(d+1)}}{\alpha^s - 1} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| \geq |\frac{\alpha^s}{\alpha^s - 1} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| - \frac{1}{\alpha^{s(d+1)}.(\alpha^s - 1)}$$

$$> |\frac{\alpha^s}{\alpha^s - 1} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| - \frac{1}{\alpha^s(\alpha^s - 1)}$$

Juntando os resultados obtemos que:

$$\alpha^{-2(n+d)} > \frac{1}{2^{s+3}}(|\frac{\alpha^s}{\alpha^s - 1} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| - \frac{1}{\alpha^s(\alpha^s - 1)})$$

A desigualdade:

$$s(m + d - 2) + 1 < n \leq s(m + d - 1) + 2$$

Implica que:

$$-2s + 2 \leq n - ms - ds \leq -s + 2$$

Logo:

$$\alpha^{-2(n+d)} > min_{3\leq s\leq 8; -2s+2\leq t\leq -s+2}\{\frac{1}{2^{s+3}}(|\frac{\alpha^s}{\alpha^s - 1} - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{n-ms-ds}| - \frac{1}{\alpha^s(\alpha^s - 1)})\} > \frac{0,018}{2^{12}}$$

$$\Longrightarrow n + d < 26$$

Uma verificação computacional nos revelou que não há soluções nesse caso. Assim, fica provado o teorema.

5.3 Demonstração do Teorema 2.1

A demonstração do teorema será divida em vários lemas, por isso, dividiremos essa subseção em duas, a primeira contendo os lemas e a segunda com a demonstração do teorema de fato. Além disso, no enunciado do teorema havia a equação $F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$, aqui trocaremos as variáveis m e n, para evitar confusão com os resultados obtidos na seção 5.2. Assim, nessa seção considereraremos a equação diofantina $F_n^s + F_{n+d}^s = F_m$ com $n \geq 1$, $d \geq 1$, $s \geq 3$ e $(m, d) \notin \{(1, 2), (1, 1)\}$. Então, vamos ao trabalho.

5.3.1 Lemas Auxiliares

Lema 5.1. *Se* $(s, d) \in \mathbb{N}^2 - \{(2, 1)\} \cup \{(1, d) \mid d \in \mathbb{N}\}$ *então para todo* $x \in \mathbb{Z}$*:*

$$1 + \alpha^{s,d} \neq \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^x$$

Onde $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Demonstração. Suponha que $(s, d) \in \mathbb{N}^2$ são tais que

$$1 + \alpha^{s.d} = \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^x \ (1)$$

para algum $x \in \mathbb{Z}$. Se $b = 1 + \alpha^{s.d}$, considere o operador linear

$$T : \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

$$x \to bx$$

A matriz deste operador na base $\{1,\alpha\}$ é

$$\begin{pmatrix} F_{s.d-1}+1 & F_{s.d} \\ F_{s.d} & F_{s.d+1}+1 \end{pmatrix}$$

Portanto a norma de b em $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ é

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(b) = F_{s.d+1}.F_{s.d-1} - F_{s.d}^2 + F_{s.d+1} + F_{s.d-1} + 1$$

Usando a relação

$$F_{n+1}.F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

temos que:

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(b) = (-1)^{s.d} + F_{s.d+1} + F_{s.d-1} + 1$$

Além disso,

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\alpha) = N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = -1$$

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\sqrt{5}) = -5$$

aplicando a norma em $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ na equação (1):

$$(-1)^{s.d} + F_{s.d+1} + F_{s.d-1} + 1 = (-5)^{s-1}.(-1)^x$$

Como o lado esquerdo é sempre positivo para $s.d \geq 2$ podemos concluir que

$$(-1)^{s.d} + F_{s.d+1} + F_{s.d-1} + 1 = 5^{s-1}$$

Dividiremos a prova em três casos:
Caso 1: $s \cdot d$ é impar.
Neste caso a equação acima fica

$$F_{s.d+1} + F_{s.d-1} = 5^{s-1}$$

Como $5 \nmid F_{n+1} + F_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $s = 1$.
Caso 2: $s \cdot d$ é par e s é impar.
Como $s.d$ é par, o determinante da matriz do operador T é igual ao seu traço. Aplicando o traço em $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ na equação (1):

$$Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(1+\alpha^{s.d}) = Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\sqrt{5}^{s-1}.\alpha^x)$$

$$Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\sqrt{5}^{s-1}.\alpha^x) = \sqrt{5}^{s-1}.Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\alpha^x) = \sqrt{5}^{s-1}.(F_{x+1} + F_{x-1})$$

Substutuindo na equação acima obtemos:

$$5^{s-1} = N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(b) = Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(b) = \sqrt{5}^{s-1}.(F_{x+1} + F_{x-1})$$

Simplificando,

$$F_{x+1} + F_{x-1} = \sqrt{5}^{s-1}$$

Pelo mesmo argumento do caso 1 concluimos que s=1.

Caso 3: $s \cdot d$ é par e s é par.
Como s.d é par, o determinante da matriz do operador T é igual ao seu traço. aplicando o traço na equação (1):

$$Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(1+\alpha^{s.d}) = Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\sqrt{5}^{s-1}.\alpha^x)$$

$$Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\sqrt{5}^{s-1}.\alpha^x) = \sqrt{5}^{s-2}.Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(\sqrt{5}.\alpha^x) = \sqrt{5}^{s}.F_x$$

Substituindo na equação acima obtemos:

$$5^{s-1} = N_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(b) = Tr_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(b) = \sqrt{5}^{s}.F_x$$

$$\implies F_x = \sqrt{5}^{s-2}$$

Como corolário do Teorema Do Divisor Primitivo temos que as únicas potências de 5 na sequência de Fibonacci são $F_1 = 1$ e $F_5 = 5$. Logo $s = 2$ e $x = 1$ ou $s = 4$ e $x = 5$. Apenas o primeiro caso é uma solução da equação (1), nele temos d=1.
Analisando os três casos, vemos que se a equação (1) possui solução, então s=1 ou s=2 e d=1, provando assim o primeiro lema.
O proximo lema nos dirá quão bem $\sqrt{5}$ pode ser aproximado por um número racional. Ele será usado na demonstração de outro lema.

Lema 5.2. *Se $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, q \neq 0$, então*

$$|\sqrt{5} \cdot q - p| \geq \frac{1}{6q}$$

Demonstração.

$$|\sqrt{5} \cdot q - p| = \frac{|5 \cdot q^2 - p|^2}{\sqrt{5} \cdot q + p}$$

Como $\sqrt{5}$ é irracional, $|5 \cdot q^2 - p^2| \geq 1$, então

$$|\sqrt{5} \cdot q - p| > \frac{1}{\sqrt{5}q + p}$$

O inteiro p que minimiza a diferença $|q \cdot \sqrt{5} - p|$ é $p = \lfloor \sqrt{5} \cdot q \rfloor < 3q$ ou $p = \lceil \sqrt{5} \cdot q \rceil \leq 3q$, portanto

$$|q \cdot \sqrt{5} - p| \geq \frac{1}{\sqrt{5} \cdot q + \lceil \sqrt{5} \cdot q \rceil} \geq \frac{1}{q(\sqrt{5} + 3)} > \frac{1}{6q}$$

O próximo lema será uma desigualdade envolvendo a sequência de Fibonacci e a constante de ouro.

Lema 5.3. *Valem as seguintes desigualdades:*
(i) Se $x \in \mathbb{N}$, então

$$|\sqrt{5}^s \cdot F_x^s - \alpha^{ns}| < 2^s \cdot \alpha^{xs-2x}$$

(ii) Se $x \in \mathbb{N}$ e $x > \log_\alpha(s)$, então

$$|\sqrt{5}^s \cdot F_x^s - \alpha^{xs}| < 2s \cdot \alpha^{xs-2x}$$

Demonstração. Faremos uma desigualdade que será útil na demonstração dos dois ítens.

Usando a formula de Binet para a sequência de Fibonacci:

$$|\sqrt{5}^s \cdot F_x^s - \alpha^{xs}| = |\sqrt{5}^s \cdot \Big(\frac{\alpha^x - \beta^x}{\sqrt{5}})^s - \alpha^{xs}| = |(\alpha^x - \beta^x)^s - \alpha^{xs}|$$

expandindo usando o binômio de Newton:

$$|(\alpha^x - \beta^x)^s - \alpha^{xs}| = |\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \cdot \alpha^{xs-kx} \cdot \beta^{kx} - \alpha^{xs}|$$

$$= |\sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \cdot \alpha^{xs-kx} \cdot (-1 \cdot \alpha^{-1})^{kx}| = |\sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \cdot (-1)^{kx} \cdot \alpha^{xs-2kx}|$$

Usando a desigualdade triângular e o fato de que $2k - 2 \geq k$ para $k \geq 2$:

$$|\sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \cdot (-1)^{kx} \cdot \alpha^{xs-2kx}| \leq \sum_{k=1}^{s} \cdot \binom{s}{k} \cdot \alpha^{xs-2kx} = \alpha^{xs-2x} \cdot \sum_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{-2(k-1)x}$$

$$\leq \alpha^{xs-2x} \cdot (s + \sum_{k=2}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{-kx})$$

Assim obtemos a desigualdade

$$|\sqrt{5}^s \cdot F_x^s - \alpha^{xs}| < \alpha^{xs-2x} \cdot (s + \sum_{k=2}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{-kx})$$

demonstração do ítem (i):

$$|\sqrt{5}^s \cdot F_x^s - \alpha^{xs}| < \alpha^{xs-2x} \cdot (s + \sum_{k=2}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{-kx}) < \alpha^{xs-2x}(s + \sum_{k=2}^{s} \binom{s}{k}) < \alpha^{xs-2x} \cdot 2^s$$

demonstração do ítem (ii) Usando o fato que $x > \log_\alpha(s)$ é possível melhorar a estimativa da desigualdade do ítem (i):

$$|\sqrt{5}^s \cdot F_x^s - \alpha^{xs}| < \alpha^{xs-2x} \cdot (s + \sum_{k=2}^{s} \binom{s}{k} \alpha^{-kx}) < \alpha^{xs-2x}(s + (1+\alpha^{-x})^s) < \alpha^{xs-2x}(s + (1+s^{-1})^s) \leq 2s \cdot \alpha^{xs-2x}$$

Para o próximo lema precisamos extender a sequência de Fibonacci para os números negativos. Defina $F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$, então a sequência de Fibonacci satisfaz a relação $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 5.4. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$ vale a equação*

$$\alpha^n = \alpha \cdot F_n + F_{n-1}$$

Demonstração. o caso $n \geq 0$ ja foi provado nos resultados auxiliares. provaremos o resultado para os inteiros negativos por indução.

Para $n = 0$:

$$1 = \alpha^n = \alpha \cdot F_0 + F_{-1}$$

Para $n = -1$:

$$\alpha^{-1} = \alpha - 1 = \alpha \cdot F_{-1} + F_{-2}$$

Suponha que o resultado é válido para todo $j > n$, então

$$\alpha^n = \alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} = \alpha(F_{n+2} - F_{n+1}) + F_{n+1} - F_n = \alpha \cdot F_n + F_{n-1}$$

Finalizando a prova do lema.
O próximo lema será uma estimativa em m em função de n,s e d.

Lema 5.5. *Se*

$$F_n^s + F_{n+d}^s = F_m$$

então $s(n+d-2)+1 < m \leq s(n+d-1)+2$

Demonstração. Usando a desigualdade $\alpha^{n-2} < F_n < \alpha^{n-1}$:

$$\alpha^{m-1} > F_m = F_n^s + F_{n+d}^2 > \alpha^{(n+d-2)s}$$

$$\Longrightarrow m > s(n+d-2)+1$$

Por outro lado,

$$\alpha^{m-2} = F_m < F_n^s + F_{n+d}^s < \alpha^{ns-s} + \alpha^{ns+ds-s} \leq \alpha^{ns+ds-s+1}$$

$$\Longrightarrow m < s(n+d-1)+3 \Longleftrightarrow m \leq s(n+d) - s + 2$$

O próximo lema dará uma limitação para $n+d$ em função de s quando $d \leq 2$, então neste caso limitar s no problema original significa limitar n e d.

Lema 5.6. *Se* $d \leq 2, s \geq 3$ *e*

$$F_n^s + F_{n+d}^s = F_m$$

então

$$n + d < 3s$$

Demonstração.

$$|\alpha^m \cdot \sqrt{5}^{s-1} - \alpha^{ns+ds} - \alpha^{ns}| = |\sqrt{5}^{s-1}(\alpha^m - \sqrt{5} \cdot F_m) - (\alpha^{ns+ds} - \sqrt{5}^s \cdot F_{n+d}^s) - (\alpha^{ns} - \sqrt{5}^s \cdot F_n^s)|$$

Usando as estimativas feitas anteriormente e a desigualdade triangular:

$$|\sqrt{5}^{s-1}(\alpha^m - \sqrt{5} \cdot F_m) - (\alpha^{ns+ds} - \sqrt{5}^s \cdot F_{n+d}^s) - (\alpha^{ns} - \sqrt{5}^s \cdot F_n^s)| \leq |\beta|^m \cdot \sqrt{5}^{s-1} + 2^s \cdot \alpha^{ns-2n} + 2^s \cdot \alpha^{ns+ds-2(n+d)}$$

$$< 2^{s+1} \cdot \alpha^{ns+ds-2n-2d} + \sqrt{5}^{s-1} \cdot |\beta|^m$$

Usando a desigualdade do lema anterior e o fato de que $|\beta| < 1$:

$$\sqrt{5}^{s-1} \cdot |\beta|^m < \sqrt{5}^{s-1} \cdot |\beta|^{s(n+d-2)+1} = (\sqrt{5} \cdot |\beta|^2)^{s-1} \cdot |\beta|^{s(n+d-4)+3} < |\beta|^{s(n+d-4)+3} = \frac{\alpha^{4s-3}}{\alpha^{s(n+d)}} < 2^{s+1} \cdot \alpha^{ns+ds-2(n+d)}$$

Assim obtemos:

$$|\sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^m - \alpha^{ns} - \alpha^{ns+ds}| < 2^{s+1} \cdot \alpha^{ns+ds-2n-2d} \ (3)$$

Dividindo ambos os lados por α^{ns+ds}:

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < 2^{s+1} \cdot \alpha^{-2(n+d)} \ (4)$$

Para limitar o lado esquerdo inferiormente escrevemos $\alpha^n = \alpha \cdot F_n + F_{n-1}$:

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| = |1 + \alpha \cdot F_{-s\cdot d} + F_{-sd-1} - \sqrt{5}^{s-1} \cdot (\alpha \cdot F_{m-ns-ds} + F_{m-ns-ds-1})|$$

$$= \frac{|\sqrt{5} \cdot F_{-sd} - \sqrt{5}^{s} \cdot F_{m-ns-ds} - \sqrt{5}^{s-1} L_{m-ns-ds} + 1 + L_{-sd}|}{2}$$

Como a expressão acima é diferente de zero, se a parte que multiplica $\sqrt{5}$ for zero concluímos que:

$$\frac{|\sqrt{5} \cdot F_{-sd} - \sqrt{5}^{s} \cdot F_{m-ns-ds} - \sqrt{5}^{s-1} L_{m-ns-ds} + 1 + L_{-sd}|}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Caso contrário, usamos um lema anterior:

$$\frac{|\sqrt{5} \cdot F_{-sd} - \sqrt{5}^{s} \cdot F_{m-ns-ds} - \sqrt{5}^{s-1} L_{m-ns-ds} + 1 + L_{-sd}|}{2} > \frac{1}{12(|F_{-sd} - \delta(s)|}$$

Onde $\delta(s) = \sqrt{5}^{s-1} \cdot F_{m-ns-ds}$ quando s é impar e $\delta(s) = \sqrt{5}^{s-2} L_{m-ns-ds}$ quando s é par. Em ambos os casos podemos confluir que

$$|F_{-sd} - \delta(s)| \leq |F_{-sd}| + |\delta(s)| < F_{2s} + \sqrt{5}^{s-1} \cdot L_{ns+ds-m} < \sqrt{5}^{s} \cdot L_{2s-1} < \alpha^{4s}$$

Juntando todas as informações temos:

$$\frac{1}{12 \cdot \alpha^{4s}} < 2^{s+2} \cdot \alpha^{-2(n+d)}$$

$$\Longrightarrow \alpha^{2(n+d)} < 48 \cdot \alpha^{4s} \cdot 2^s < \alpha^{8+6s}$$

$$\Longrightarrow n + d < 4 + 1,5s < 3s$$

Agora, vamos estimar o quão próximo uma potência de α pode estar de uma potência de $\sqrt{5}$.

Lema 5.7. *Se $s \neq 2, 4$ e $x \in \mathbb{N}$, então*

$$|\alpha^x - \sqrt{5}^{s-1}| \geq 1 - |\beta|^x$$

Demonstração. Se s é impar,

$$|\alpha^x - \sqrt{5}^{s-1}| = |(\alpha^x + \beta^x) - \sqrt{5}^{s-1} - \beta^x| \geq |L_x - \sqrt{5}^{s-1}| - |\beta|^x$$

Como $5 \nmid L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $|L_x - \sqrt{5}^{s-1}| \geq 1$, portanto:

$$|\alpha^x - \sqrt{5}^{s-1}| \geq 1 - |\beta|^x$$

Se s é par,

$$|\alpha^x - \sqrt{5}^{s-1}| = \sqrt{5}|(\frac{\alpha^x - \beta^x + \beta^x}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}^{s-2})| \geq \sqrt{5}|f_x - \sqrt{5}^{s-2}| - |\beta|^x$$

Como a única potência de 5 na sequência de Fibonacci são 1 e 5, $|F_x - \sqrt{5}^{s-2}| \geq 1$, logo:

$$|\alpha^x - \sqrt{5}^{s-1}| \geq \sqrt{5} - |\beta|^x > 1 - |\beta|^x$$

Agora vamos provar uma desigualdade do tipo do lema (5.7) porém quando $d \geq 3$.

Lema 5.8. *Se $d \geq 3, s \geq 5$ e*

$$F_n^s + F_{n+d}^S = F_m$$

então

$$n + d < 3s$$

Demonstração. Dividindo a desigualdade (3) do lema (5.7) por α^m:

$$|\alpha^{ns+ds-m} + \alpha^{ns-m} - \sqrt{5}^{s-1}| < 2^{s+2} \cdot \alpha^{ns+ds-2(n+d)-m}$$

Usando a desigualdade triangular no lado esquerdo e as estimativas feitas em m:

$$|\alpha^{ns+ds-m} + \alpha^{ns-m} - \sqrt{5}^{s-1}| \geq |\sqrt{5}^{s-1} - \alpha^{ns+ds-m}| - \alpha^{ns-m}$$

$$> 1 - |\beta|^{ns+ds-m} - \alpha^{ns-m} > 1 - |\beta|^{2s-1} - \alpha^{-ds+2s-1} > 1 - \alpha^{-9} - \alpha^{-5} > \frac{1}{2}$$

assim concluimos que

$$\frac{1}{2} < 2^{s+2}\alpha^{ns+ds-2(n+d)-m} < 2^{s+2} \cdot \alpha^{2s-1-2(n+d)}$$

$$\Longrightarrow \alpha^{2(n+d)} < 2^{s+3} \cdot \alpha^{2s-1} < \alpha^{4s+5}$$

$$\Longrightarrow n + d \leq 2s + 2 < 3s$$

O próximo lema resolverá o problema nos casos em que $s = 3, 4$.

Lema 5.9. *Se $s = 3, 4$ e*

$$F_n^s + F_{n+d}^s = F_m$$

então $n = d = 1$.

Demonstração. Supondo $d \leq 2$, temos que $n + d < 3s < 12$, assim podemos fazer uma verificação computacional para resolver este caso.
Suponha que $d \geq 3$, então olhando para a desigualdade (4) do lema (5.7):

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < 2^{s+2} \cdot \alpha^{-2(n+d)}$$

$$\implies -\alpha^{-3} + |1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < -\alpha^{-s\cdot d} + |1 - \alpha^{m-ns-ds} \cdot \sqrt{5}^{s-1}| < 2^{s+2} \cdot \alpha^{-2(n+d)} < 2^6 \cdot \alpha^{-2(n+d)}$$

Como $-2s+2 \leq m - ns - ds \leq -s+2$, podemos verificar computacioalmente que para $s = 3, 4$, $-2s+2 \leq t \leq -s+2$

$$min\{-\alpha^{-3s} + |1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}|\} > 0,005$$

Assim concluimos que $n + d < 10$ e encerramos com uma verificação computacional.
Agora provaremos a generalização do teorema de Luca e Oyono.

5.3.2 Demonstração do Teorema

Em vista do lema anterior, podemos supor que $s \geq 5$. Reescrevendo a equação usando a fórmula de Binet:

$$\frac{\alpha^m}{\sqrt{5}} - F_{n+d}^s = \frac{\beta^m}{\sqrt{5}} + F_n^s$$

Dividindo ambos os lados por F_{n+d}^s:

$$\alpha^m \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot F_{n+d}^{-s} - 1 = \frac{\beta^m.}{\sqrt{5} \cdot F_{n+d}^s} + \frac{F_n^s}{F_{n+d}^s} < \frac{2}{1,5^s} \ (5)$$

Onde usamos a desigualdade $\frac{F_n}{F_{n+d}} < \frac{1}{1,5}$ para $n > 2$.
Aplicando a desigualdade de Matveev para $\Lambda = \alpha^m \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.F_{n+d}^{-s} - 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \sqrt{5}, \alpha_3 = F_{n+d}$, temos:

$$|\Lambda| > (e \cdot max\{s, m, 1\})^{-c'} = (e \cdot m)^{-c'}$$

$$c' \geq C_{3,2}.A_1, A_2, A_3$$

Tomando:

$$C_{3,2} = 3,4 \cdot 10^9$$

$$A_1 = 1,61$$

$$A_2 = 0,5$$

$$A_3 = 0,5(n+d)$$

Portanto:

$$\implies c' \geq 1,4 \cdot 10^9 (n+d)$$

Aplicando logaritimos na desigualdade acima:

$$-c' \cdot \log(e \cdot m) > \log(2) - s\log(1,5)$$

$$\implies s < \frac{\log(2)}{\log(1,5)} + 1,4 \cdot 10^9 \cdot (n+d) \cdot \log(em) < 1,5 \cdot 10^9 \cdot (n+d) \cdot \log(m) < 1,5 \cdot 10^9 (n+d) \cdot \log(s(n+d))$$

Se $s < n + d$ não fazemos nada. Caso contrário:

$$s < 1,5 \cdot 10^9 \cdot (n+d) \cdot \log((n+d) \cdot s) \leq 3 \cdot 10^9 \cdot (n+d) \log(s)$$

$$\frac{s}{\log(s)} < 3 \cdot 10^9(n+d)$$

Uma relação conhecida diz que se $A > 3$, então

$$\frac{s}{\log(s)} < A \Longrightarrow s < 2A \cdot \log(A)$$

Logo:

$$S < 3 \cdot 10^9(n+d) \cdot \log\big(3 \cdot 10^9(n+d)\big) < 3 \cdot 10^9 \cdot \log\big(3 \cdot 10^9\big)(n+d) \cdot \log(n+d)$$
$$< 2,22 \cdot 10^{12} \cdot (n+d) \cdot \log(n+d)$$

Dividiremos a demonstração nos quatro casos apresentados nas quatro subseções a seguir.

5.3.3 Caso 1

Neste caso $n + d < 2 \cdot \log_\alpha(s)$, então:

$$s < 2,22 \cdot 10^{12} \cdot (n+d) \cdot \log(n+d) < 2,22 \cdot 10\ 12 \cdot 2 \cdot \log_\alpha(s) \cdot \log(2 \cdot \log_\alpha(s))$$

Uma verificação computacional no Matemática mostra que $s < 1,88 \cdot 10^{17}$ e $n + d < \log_\alpha(s) < 165$.

Redução na cota de s:

Considere:

$$\Gamma = m \cdot \log(\alpha) - \log\left(\sqrt{5}\right) - s \cdot \log_{F_{n+d}}$$

Então *Gamma* é positivo pois o lado esquerdo da desigualdade (5) é positivo. Além disso:

$$\Gamma < e^\Gamma - 1 = \alpha^m \cdot \sqrt{5}^{-1} \cdot F_{n+d}^{-s} - 1 < 2 \cdot (1,5)^{-s}$$

Ou seja:

$$m \cdot \log(\alpha) - \log\left(\sqrt{5}\right) - s\log(F_{n+d}) < 2 \cdot (1,5)^s < 2 \cdot (1,5)^{\frac{m}{n+d-1}} < 2 \cdot (1,5)^{\frac{m}{164}}$$

Dividindo ambos os lados por $\log(F_{n+d})$:

$$m \cdot \frac{\log(\alpha)}{\log(F_{n+d})} - s - \frac{log(\sqrt{5})}{\log(F_{n+d})} < 2 \cdot (1,5^{\frac{1}{165}})^m$$

Aplicando $A = 2$,$B = 1,5^{\frac{1}{165}}$,$\gamma_{n+d} = \frac{\log(\alpha)}{\log(F_{n+d})}$ e $\mu_{n+d} = -\frac{\log(\sqrt{5})}{\log(F_{n+d})}$ no teorema de Dujella-Pytho, verificamos computacionalmente que $q_{99,n+d} > 6 \cdot 1,88,10^{17}$ e:

$$||\mu_{n+d} \cdot q_{99,n+d}|| - 1,88 \cdot 10^{17} \cdot ||\gamma \cdot q_{99,n+d}|| > 0$$

para todo $0 < n + d \leq 164$, então:

$$s < max\{\frac{\log(A \cdot q_{99,n+d})}{\log(B)}\} < 58057$$

5.3.4 Caso 2

Neste caso $n+d > 2 \cdot \log_\alpha(s)$ e $d \geq 4$.
Primeiro, vamos conseguir uma cota numérica para o s. Usando um dos lemas apresentado anteriormente:

$$|\sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^m - \alpha^{ns+ds} - \alpha^{ns}| = |\sqrt{5}^{s-1} \cdot (\alpha^m - \sqrt{5} \cdot F_m) - (\alpha^{ns+ds} - \sqrt{5}^s \cdot F^s_{n+d}) - (\alpha^{ns} - \sqrt{5}^s \cdot F^s_n)|$$

$$\leq |\sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^m - \alpha^{ns+ds} - \alpha^{ns}| \leq |\sqrt{5}^{s-1}(\alpha^m - \sqrt{5}F_m)| + |\alpha^{ns+ds} - \sqrt{5}^s \cdot F^s_{n+d}| + |\alpha^{ns} - \sqrt{5}^s \cdot F^s_n|$$

$$< \sqrt{5}^{s-1} \cdot |\beta|^m + 2s \cdot \alpha^{ns+ds-2n-2d} + 2^s \cdot \alpha^{ns-2n}$$

Dividindo ambos os lados por α^{n+d}:

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < 2s \cdot \alpha^{-2(n+d)} + 2^s \cdot \alpha^{-ds-2n} + \sqrt{5}^{s-1} \cdot |\beta|^{m+ns+ds}$$

$$< 4s \cdot \alpha^{-2(n+d)} + |\beta|^{m+ns+ds} \cdot \sqrt{5}^{s-1} < 5s \cdot \alpha^{-2(n+d)}$$

Onde usamos o fato de $d \geq 4$ na penúltima desigualdade e a estimativa

$$\sqrt{5}^{s-1} \cdot |\beta|^m < \frac{\alpha^{4s-3}}{\alpha^{(n+d)\cdot s}}$$

feita no lema (5.7). Assim concluímos que:

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < 5s \cdot \alpha^{-2(n+d)}$$

Usando a desigualdade triangular no lado esquerdo e somando α^{sd} dos dois lados:

$$|1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < 5s \cdot \alpha^{-2(n+d)} + \alpha^{-sd} < 5s \cdot \alpha^{-2(n+d)} + \alpha^{-4 \cdot \frac{n+d}{3}} < 6s \cdot \alpha^{-(n+d)}$$

Aplicando a desigualdade de Matveev no lado esquerdo obtemos:

$$|1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| > (e, max\{s-1, |m-ns-ds|\})^{-c} > (e \cdot 2s)^{-c'}$$

Onde $c' = 2,8 \cdot 10^9$. Logo:

$$(2s \cdot e)^{-c'} < 6s \cdot \alpha^{-2(n+d)}$$

$$\Longrightarrow \alpha^{2(n+d)} < 6s(2se)^{c'} < s^{2c'}$$

$$\Longrightarrow n+d < 2c' \cdot \log_\alpha(s) < 5,6 \cdot 10^9 \cdot \log\big(2,22 \cdot 10^12(n+d) \cdot \log(n+d)\big)$$

$$\Longrightarrow n+d < 6,99 \cdot 10^{17}$$

$$\Longrightarrow s < 2,22 \cdot 10^{12} \cdot (n+d)\log(n+d) < 6,02 \cdot 10^{32}$$

Redução da cota de s:
Agora que já possuímos uma cota numérica para o s, vamos utilizar nossos conhecimentos de frações contínuas para reduzí-la.

$$|1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < \frac{5s}{\alpha^{2(n+d)}} + \frac{1}{\alpha^{sd}}$$

Como $s < \alpha^n$:

$$|1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < \frac{1}{\alpha^{ds}} + \frac{5}{\alpha^{n+2d}}$$

Além disso, $\alpha^n > s^2$, então:

$$|1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}| < \frac{1}{\alpha^{ds}} + \frac{5}{\alpha^{2d}s^2}$$

Assim, temos:

$$|\Lambda| < \frac{1}{\alpha^5} + \frac{1 \cdot 91}{25} < 0.17$$

Onde $\Lambda = 1 - \sqrt{5}^{s-1} \cdot \alpha^{m-ns-ds}$.
Defina:

$$\Gamma := (s-1)\log\left(\sqrt{5}\right) - \Big((n+d) - m\Big)\log(\alpha)$$

Então, $\Gamma \neq 0$ pois $e^\Gamma - 1 = \Lambda \neq 0$. Deste modo:

$$|e^\Gamma - 1| < 0.17 \Rightarrow |\Gamma| < 0.19 \Rightarrow e^{|\Gamma|} < 1.21$$

Logo:

$$|\Gamma| < e^{|\Gamma|} \cdot |e^\Gamma - 1| < 1.21 \cdot |\Lambda|$$

Isto é:

$$|\Gamma| < \frac{1.21}{\alpha^{sd}} + \frac{1.21 \cdot 1.91}{s^2}$$

Assuma $s \geq 174$, então vale:

$$|\Gamma| < \frac{1}{32(s-1)^2}$$

Dividindo por $\log(\alpha)(s-1)$ em ambos os lados:

$$\Big|\frac{\log\left(\sqrt{5}\right)}{\log(\alpha)} - \frac{(n+d)s - m}{s-1}\Big| < \frac{1}{32(s-1)^2}$$

Pelo critério de Legendre: $\dfrac{(n+d)s-m}{s-1} = \dfrac{p_t}{q_t}$, um convergente da fração contínua do irracional $\gamma = \dfrac{\log\left(\sqrt{5}\right)}{\log(\alpha)}$.

Vamos definir $g := mdc\Big((n+d)s - m, s-1\Big)$, então:

$$q_t = \frac{s-1}{g} < s < 6.02 \cdot 10^{32}$$

Uma verificação computacional revelou que $6.02 \cdot 10^{32} < q_{70}$, portanto, $t \in \{1, 2, ..., 69\}$. Além disso:

$$max\{a_1, a_2, ..., a_{69}\} = 29 \Rightarrow a_t \leq 29$$

Uma proprieda conhecida de frações contínuas nos diz que:

$$\left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{1}{(a_t + 2)q_t^2}$$

Substituindo q_t por $\frac{s-1}{g}$, temos:

$$\left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{g^2}{31(s-1)^2}$$

O que é uma contradição. Então, concluímos que $s \leq 173$.

5.3.5 Caso 3

$n < 2.\log_\alpha(s)$ e $d \leq 3$:

$$s < 2,22.10^{12}.(n+d).\log(n+d) < 2,22.10^{12}.(2.\log_\alpha(s)+3)(\log(2.\log_\alpha(s)+3))$$

$$\Longrightarrow s < 1,91.10^{17}$$

$$\Longrightarrow n+d < 2.\log_\alpha(s)+3 < 168$$

Redução dos limitantes: Considere:

$$\Gamma = m.\log(\alpha) - \log\left(\sqrt{5}\right) - s.\log_{F_{n+d}}$$

Então *Gamma* é positivo pois o lado esquerdo da desigualdade (5) é positivo. Além disso:

$$\Gamma < e^\Gamma - 1 = \alpha^m.\sqrt{5}^{-1}.F_{n+d}^{-s} - 1 < 2.(1,5)^{-s}$$

Ou seja:

$$m.\log(\alpha) - \log\left(\sqrt{5}\right) - s\log(F_{n+d}) < 2.(1,5)^s < 2.(1,5)^{\frac{m}{n+d-1}} < 2.(1,5)^{\frac{m}{168}}$$

Dividindo ambos os lados por $\log(F_{n+d})$:

$$m.\frac{\log(\alpha)}{\log(F_{n+d})} - s - \frac{log(\sqrt{5})}{\log(F_{n+d})} < 2.(1,5^{\frac{1}{168}})^m$$

Aplicando $A = 2$, $B = 1,5^{\frac{1}{165}}$, $\gamma_{n+d} = \frac{\log(\alpha)}{\log(F_{n+d})}$ e $\mu_{n+d} = -\frac{\log\left(\sqrt{5}\right)}{\log(F_{n+d})}$ no teorema de Dujella-Pethö, verificamos computacionalmente que $q_{99,n+d}$ satisfaz $q_{99,n+d} > 6.1 \times 10^{17}$ e

$$||\mu_{n+d} \cdot q_{99,n+d}|| - 1.91 \times 10^{17} \cdot ||\gamma \cdot q_{99,n+d}|| > 0$$

para todo $0 < n+d \leq 168$, então:

$$s < \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log(B)} < 81766.$$

Tomamos $M := 1,91 \times 10^{17}$. Para cada um dos nossos números m, tomamos $q := q_{99}$ como sendo o denominador da 99ª convergência para γ, notando que q depende de $n+d$. O valor mínimo de q para $n+d \in [3,168]$ excede $10^{44} > 6M$. Assim, podemos aplicar o lema de Dujella-Pethö para cada q, γ, e μ. O valor máximo de $M||q\gamma||$ calculado é menor que 10^{-27}, enquanto o valor mínimo de $||q\mu||$ é maior que $2,4 \times 10^{-25}$. Assim, podemos tomar $\varepsilon := ||q\mu|| - M||q\gamma|| > 10^{-25}$. Além disso, o valor máximo de q é menor que 10^{61}. Portanto, pelo lema de Dujella-Pethö, todas as soluções (n,d,s) satisfazem

$$s < \frac{\log(Aq/\varepsilon)}{\log(B)} < \frac{\log\left(2\times10^{61}\times10^{25}\right)}{\log\left(1.5^{\frac{1}{165}}\right)} < 81766.$$

5.3.6 Caso 4

Nesse caso, $n > 2.\log_\alpha(s)$ e $d \leq 3$.
Usando um dos lemas apresentados anteriormente:

$$|\sqrt{5}^{s-1}.\alpha^m - \alpha^{ns+ds} - \alpha^{ns}| = |\sqrt{5}^{s-1}.(\alpha^m - \sqrt{5}.F_m) - (\alpha^{ns+ds} - \sqrt{5}^s.F_{n+d}^s) - (\alpha^{ns} - \sqrt{5}^s.F_n^s)|$$

$$\leq |\sqrt{5}^{s-1}(\alpha^m - \sqrt{5}F_m)| + |\alpha^{ns+ds} - \sqrt{5}^s.F_{n+d}^s| + |\alpha^{ns} - \sqrt{5}^s.F_n^s|$$

$$< \sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^m + 2s.\alpha^{ns+ds-2n-2d} + 2.s.\alpha^{ns-2n}$$

Dividindo ambos os lados por α^{n+d}:

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1}| < 2s.\alpha^{-2(n+d)} + 2s.\alpha^{-ds-2n} + \sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^{m+ns+ds}$$

$$< 4s.\alpha^{-2(n+d)} + \sqrt{5}s - 1.|\beta|^{m+ns+ds} < 5s.\alpha^{-2(n+d)}$$

Onde usamos a estimativa:

$$\sqrt{5}^{s-1}.|\beta|^m < \frac{\alpha^{4s-3}}{\alpha^{(n+d)s}}$$

feita no lema (5.7). Assim concluimos que:

$$|\alpha^{-sd} + 1 - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{m-ns-ds}| < 5s.\alpha^{-2(n+d)}$$

Usando a desigualdade triangular no lado esquerdo e somando α^{sd} dos dois lados:

—1-$\sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{m-ns-ds}| < 5s.\alpha^{-2(n+d)} + \alpha^{-sd} < 6s.\alpha^{-\frac{n+d}{3}}$ (5.16)

Aplicando a desigualdade de Matveev no lado esquerdo obtemos:

$$|1 - \sqrt{5}^{s-1}.\alpha^{m-ns-ds}| > (e.max\{s-1, |m-ns-ds|\})^{-c'} > (2se)^{-c'}$$

Onde $c' = 2,8 \cdot 10^9$. Assim concluimos que:

$$\alpha^{\frac{n+d}{3}} < 6s.(2se)^{c'} < s^{2c'}$$

$$\Longrightarrow n + d < 2c'.\log_\alpha(s) < 5,6.10^9.\log\big(2,22 \cdot 10^{12}(n+d)cdot\log(n+d)\big)$$

$$\Longrightarrow n + d < 6,99.10^{17}$$

$$\Longrightarrow s < 2,22.10^{12}.(n+d)\log(n+d) < 6,02.10^{32}$$

Redução dos limitantes:
Retomando a desigualdade (5.16):

$$|1-\sqrt{5}^{s-1}\cdot\alpha^{m-ns-ds}|<\frac{5s}{\alpha^{2(n+d)}}+\frac{1}{\alpha^{sd}}$$

Como $s<\alpha^n$:

$$|1-\sqrt{5}^{s-1}\cdot\alpha^{m-ns-ds}|<\frac{1}{\alpha^{ds}}+\frac{5}{\alpha^{n+2d}}$$

Além disso, $\alpha^n>s^2$, então:

$$|1-\sqrt{5}^{s-1}\cdot\alpha^{m-ns-ds}|<\frac{1}{\alpha^{ds}}+\frac{5}{\alpha^{2d}s^2}$$

Assim, temos:

$$|\Lambda|<\frac{1}{\alpha^5}+\frac{1.91}{25}<0.17$$

Onde $\Lambda=1-\sqrt{5}^{s-1}\cdot\alpha^{m-ns-ds}$.
Defina:

$$\Gamma:=(s-1)\log\Big(\sqrt{5}\Big)-\Big((n+d)-m\Big)\log(\alpha)$$

Então, $\Gamma\neq 0$ pois $e^{\Gamma}-1=\Lambda\neq 0$. Deste modo:

$$|e^{\Gamma}-1|<0.17\Rightarrow|\Gamma|<0.19\Rightarrow e^{|\Gamma|}<1.21$$

Logo:

$$|\Gamma|<e^{|\Gamma|}\cdot|e^{\Gamma}-1|<1.21\cdot|\Lambda|$$

Isto é:

$$|\Gamma|<\frac{1.21}{\alpha^{sd}}+\frac{1.21\cdot 1.91}{s^2}$$

Assuma $s\geq 73$, então vale:

$$|\Gamma|<\frac{1}{32(s-1)^2}\tag{5.17}$$

Dividindo por $\log(\alpha)(s-1)$ em ambos os lados:

$$\Big|\frac{\log\big(\sqrt{5}\big)}{\log(\alpha)}-\frac{(n+d)s-m}{s-1}\Big|<\frac{1}{32(s-1)^2}$$

Pelo critério de Legendre: $\dfrac{(n+d)s-m}{s-1}=\dfrac{p_t}{q_t}$, um convergente da fração contínua do irracional $\gamma=\dfrac{\log\big(\sqrt{5}\big)}{\log(\alpha)}$.

Vamos definir $g:=mdc\Big((n+d)s-m,s-1\Big)$, então:

$$q_t=\frac{s-1}{g}<s<6.02\cdot 10^{32}$$

Uma verificação computacional revelou que $6.02\cdot 10^{32}<q_{70}$, portanto, $t\in\{1,2,...,69\}$. Além disso:

$$max\{a_1,a_2,...,a_{69}\}=29\Rightarrow a_t\leq 29$$

Uma proprieda conhecida de frações contínuas nos diz que:

$$\left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{1}{(a_t+2)q_t^2}$$

Substituindo q_t por $\frac{s-1}{g}$, temos:

$$\left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{g^2}{31(s-1)^2}$$

O que contradiz a desigualdade (5.17). Deste modo, concluímos que $s \leq 72$.

5.3.7 Conclusão

Olhando para os casos 1,2,3 e 4 vemos que todas as variáveis da equação foram limitadas. Fazendo uma verificação computacional vemos que as únicas soluções da equação são $n = d = 1$ para $s \geq 3$. Na subseção a seguir será dada uma intuição do método computacional que usamos.

5.4 Método computacional

Nesta seção vamos descrever o método computacional utilizado para resolver os problemas abordados. Falaremos apenas do programa usado no Teorema 2.1, porém o programa do Teorema 2.2 funciona de forma totalmente análoga.

O maior problema das equações diofantinas envolvendo números de Fibonacci com relação as verificações computacionais é que a sequência de Fibonacci cresce exponencialmente. Isso faz com que o tempo gasto para a execução das verificações seja muito grande ou em alguns casos inviável. Para fazer os testes computacionais neste relatório criamos um método computacional cujo principal objetivo é resolver o problema do crescimento exponencial da sequência de Fibonacci.

Primeiro escolhemos um conjunto de números primos $\{p_1, ..., p_n\}$ que sejam grandes mas que possuam periodo de Pisano pequeno. Por exemplo, o período da sequência de Fibonacci módulo o primo $p = 3010349$ é 62, então entre os mais de 3 milhôes de valores que um número pode assumir $\pmod p$ no máximo 62 são congruentes a algum número de Fibonacci.

Após a escolha dos primos, calculamos todos os 200 primeiros termos da sequência de Fibonacci módulo esses primos. Como a sequência de Fibonacci módulo algum número é limitada, este processo ocorre de forma quase imediata.

Para verificar se alguma tripla (n, d, s) satisfaz a equação $F_n^s + F_{n+d}^s = F_m$, o programa primeiro testa se a expressão $F_n^s + F_{n+d}^s \pmod{p_1}$ é congruente a algum número de Fibonacci módulo p_1. Se isto não ocorrer, a tripla é descartada. Caso contrário o programa testa se a expressão $F_n^s + F_{n+d}^s \pmod{p_2}$ é congruente a algum número de Fibonacci módulo p_2. Se isto não ocorrer, a tripla é descartada, e assim ocorre sucessivamente.

Neste sentido os números primos funcionam como filtros das possíveis soluções da equação $F_n^s + F_{n+d}^s = F_m$. Na montagem do programa devemos escolher uma quantidade de números primos suficientemente grande para que o conjunto das triplas não-filtradas seja vazio ou muito pequeno.

Em nosso programa foram utilizados os 4 filtros a seguir: $p_1 = 39161$ (com período 110), $p_2 = 28657$ (com período 92), $p_3 = 9349$ (com período 38) e $p_4 = 9901$ (com período 66). O programa se mostrou muito eficiente, demorando apenas 35 segundos para resolver a equação quando $n + d < 168$ e $3 \leq s \leq \frac{58057}{n+d-1}$. Para efeito de comparação, Luca e Oyono [2] demoraram aproximadamente uma hora para resolver o mesmo problema quando $n \leq 150$ e $d = 1$.

Referências

[1] D. Marques, A. Togbé, *On te sum of powers of two consecutive Fibonacci numbers*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 86 (2010), 174-176.

[2] F. Luca, R. Oyono, *An exponential Diophantine equantion related to the powers of two consecutive Fibonacci numbers*, Colloquium Mathematicum, Vol. 137, No. 2.

[3] A. Chaves, D. Marques *A Diophantine equation related to the sum of squares of consecutives k-generalized Fibonacci numbers*, The Fibonacci Quarterly, V. 52, No 1, 70-74.